Les variables aléatoires

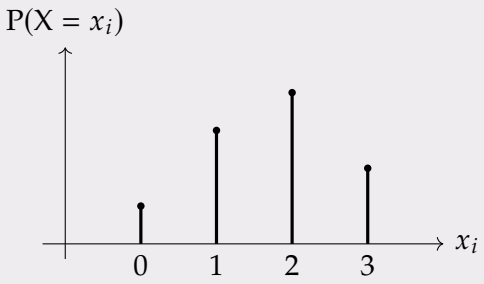
Une variable aléatoire associe un nombre au résultat d'une expérience du hasard : le gain à un jeu, le nombre de pannes, la durée d'attente. On résume son comportement par trois nombres : l'espérance, qui donne la valeur moyenne attendue sur un grand nombre de répétitions ; la variance et l'écart-type, qui mesurent la dispersion autour de cette moyenne. L'espérance est l'outil de décision : un jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est nulle. La difficulté est de bien construire la loi de probabilité avant tout calcul.

Prérequis : Probabilités et statistiques. **Pour s'entraîner :** Exercices : variables aléatoires.

Propriété 1 (Variable aléatoire et loi de probabilité, 1re)

Variable aléatoire : une variable aléatoire X associe un nombre réel à chaque issue de l'expérience.

Loi de probabilité : c'est la donnée de toutes les valeurs x_i prises par X et de leurs probabilités $P(X = x_i)$. On la présente dans un tableau. La somme de toutes les probabilités vaut 1.



Exemple. On lance un dé équilibré et X donne le numéro obtenu. Alors X prend les valeurs 1 à 6, chacune avec la probabilité $\frac{1}{6}$. La somme des probabilités vaut bien $6 \times \frac{1}{6} = 1$.

Exercice 1 *Construire une loi de probabilité (1re)*

1. On lance deux fois de suite une pièce équilibrée et on note X le nombre de « pile » obtenus.
   a) Lister les quatre issues possibles de l'expérience.
   b) Donner la loi de probabilité de X dans un tableau.
   c) Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
2. Compléter la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,5	...

3. On lance un dé équilibré. La variable aléatoire Y vaut 1 si le résultat est 6, et 0 sinon. Donner la loi de probabilité de Y.

Propriété 2 (Espérance, 1re)

L'**espérance** de X est la moyenne des valeurs, pondérée par leurs probabilités :

$$E(X) = \sum x_i \, P(X = x_i) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots$$

Elle représente la valeur moyenne obtenue si l'on répète l'expérience un très grand nombre de fois.

Exemple. Soit X de loi $P(X = 0) = 0{,}5$, $P(X = 1) = 0{,}3$, $P(X = 2) = 0{,}2$. Alors

$$E(X) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}2 = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7.$$

Exercice 2 *Calculer une espérance, étape par étape (1re)*

1. La variable aléatoire X a la loi de probabilité suivante.

x_i	-1	0	2	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,4	0,1

   a) Vérifier que cette loi est bien définie.

   b) Compléter : $E(X) = (-1)\times\dots+0\times\dots+2\times\dots+5\times\dots = \dots+\dots+\dots+\dots = \dots$

2. Calculer l'espérance du nombre de « pile » obtenus en deux lancers (variable X de l'exercice 1). Interpréter le résultat.

3. On lance un dé équilibré et on note Z le numéro obtenu. Calculer E(Z). Ce résultat est-il une valeur possible de Z ? Que représente-t-il ?

Propriété 3 (Variance et écart-type, 1re)

La **variance** mesure la dispersion des valeurs autour de l'espérance. On la calcule le plus souvent avec la formule

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2}$$

où $E(X^2) = \sum x_i^2 \, P(X = x_i)$. L'**écart-type** est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$; il s'exprime dans la même unité que X.

Exemple. Avec la loi précédente, $\mathrm{E}(X^2) = 0^2 \times 0{,}5 + 1^2 \times 0{,}3 + 2^2 \times 0{,}2 = 0{,}3 + 0{,}8 = 1{,}1$. Donc $\mathrm{V}(X) = 1{,}1 - 0{,}7^2 = 1{,}1 - 0{,}49 = 0{,}61$ et $\sigma(X) = \sqrt{0{,}61} \approx 0{,}78$.

Propriété 4 (Transformation affine, 1re)

Si a et b sont deux réels, alors $\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$ et $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$. Ajouter une constante décale l'espérance mais ne change pas la dispersion ; multiplier par a multiplie la variance par a^2.

Méthode : calculer espérance, variance, écart-type

1. Dresser le tableau de la loi de probabilité (vérifier que la somme vaut 1).
2. Calculer $\mathrm{E}(X) = \sum x_i\,\mathrm{P}(X = x_i)$.
3. Calculer $\mathrm{E}(X^2) = \sum x_i^2\,\mathrm{P}(X = x_i)$, puis $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.

Exercice 3 *Variance et écart-type (1re)*

1. On reprend la variable aléatoire X de l'exercice 2, de loi $\mathrm{P}(X = -1) = 0{,}2$, $\mathrm{P}(X = 0) = 0{,}3$, $\mathrm{P}(X = 2) = 0{,}4$, $\mathrm{P}(X = 5) = 0{,}1$, pour laquelle $\mathrm{E}(X) = 1{,}1$.
   a) Calculer $\mathrm{E}(X^2)$.
   b) En déduire $\mathrm{V}(X)$, puis $\sigma(X)$ (arrondir au centième).
2. On reprend la variable Z (numéro obtenu avec un dé équilibré), pour laquelle $\mathrm{E}(Z) = 3{,}5$. Calculer $\mathrm{E}(Z^2)$, $\mathrm{V}(Z)$ et $\sigma(Z)$ (arrondir au centième).
3. On reprend la variable Y de l'exercice 1 (qui vaut 1 si le dé donne 6, et 0 sinon). Calculer $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{V}(Y)$ et $\sigma(Y)$ (arrondir au centième).

Exercice 4 *Transformation affine (1re)* La variable aléatoire X vérifie $\mathrm{E}(X) = 1{,}1$ et $\mathrm{V}(X) = 3{,}09$.

1. On pose $Y = 2X + 3$. Calculer $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{V}(Y)$ et $\sigma(Y)$ (arrondir au centième).
2. On pose $Z = 10 - X$. Calculer $\mathrm{E}(Z)$ et $\mathrm{V}(Z)$.
3. La température T d'une pièce, en degrés Celsius, est une variable aléatoire d'espérance 20 et d'écart-type 2. En degrés Fahrenheit, cette température s'écrit $F = 1{,}8\,T + 32$. Calculer $\mathrm{E}(F)$ et $\sigma(F)$.

Exercice 5 *Problème en contexte : un jeu (1re)* Un jeu coûte 3 € la partie. On tire une boule : on gagne 10 € avec une probabilité de 0,1, 5 € avec une probabilité de 0,2, et rien avec une probabilité de 0,7. On note G le gain net (somme reçue moins le prix de la partie).

1. Donner la loi de probabilité de G.
2. Calculer E(G).
3. Le jeu est-il favorable au joueur ? Justifier.
4. Quel devrait être le prix de la partie pour que le jeu soit équitable ?
5. Calculer V(G) et $\sigma(G)$ (arrondir au centième).

Exercice 6 *Problème en contexte : comparer deux loteries (1re)* Deux loteries proposent chacune des billets à 5 €. Pour la loterie 1, le billet rapporte 50 € avec une probabilité de 0,1 et rien sinon ; on note X_1 la somme reçue. Pour la loterie 2, le billet rapporte 4 € avec une probabilité de 0,5 et 6 € sinon ; on note X_2 la somme reçue.

1. Calculer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
2. Calculer $V(X_1)$, $\sigma(X_1)$, $V(X_2)$ et $\sigma(X_2)$.
3. Quelle loterie est la plus « risquée » ? Interpréter les écarts-types.
4. Ces jeux sont-ils équitables ?

⚠ Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Oublier de pondérer par les probabilités	$E(X) = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots}{n}$	$E(X) = \sum x_i \, P(X = x_i)$
Calculer $\big(E(X)\big)^2$ au lieu de $E(X^2)$	$V(X) = E(X)^2 - E(X^2)$	$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$
Confondre variance et écart-type	$\sigma(X) = V(X)$	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
Oublier le coût dans un jeu	E(gain) = E(tirage)	retrancher la mise : gain net

Exercice 7 *QCM (1^{re})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. La variable aléatoire X a pour loi $P(X = 0) = 0{,}5$, $P(X = 1) = 0{,}3$ et $P(X = 2) = 0{,}2$. Alors $E(X)$ vaut :

   A. 0,7 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 1,1

2. L'écart-type $\sigma(X)$ est égal à :

   A. $V(X)$ **B.** $V(X)^2$ **C.** $\sqrt{V(X)}$ **D.** $E(X^2) - E(X)$

3. Si $E(X) = 3$ et $Y = 2X - 1$, alors $E(Y)$ vaut :

   A. 6 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 3

4. Si $V(X) = 4$ et $Y = 3X$, alors $V(Y)$ vaut :

   A. 12 **B.** 4 **C.** 7 **D.** 36

Exercice 8 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. La somme des probabilités d'une loi de probabilité vaut toujours 1.

B. L'espérance d'une variable aléatoire est toujours l'une des valeurs prises par cette variable.

C. Une variance peut être négative.

D. Si X prend toujours la valeur 5, alors $V(X) = 0$.

E. $E(X + 10) = E(X) + 10$.

F. $V(X + 10) = V(X) + 10$.

G. Un jeu est équitable lorsque l'espérance du gain net est nulle.

H. Si $E(X) = 2$, alors $E(X^2) = 4$.

*Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche **Que faire quand je bloque ?***
*Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche **Mémorisation et sciences cognitives**.*
*Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton **Carnet d'erreurs**.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1.

a) En notant P pour pile et F pour face, les issues sont : PP, PF, FP et FF. Elles sont équiprobables, chacune de probabilité $\frac{1}{4}$.

b) X vaut 2 pour PP, 1 pour PF et FP, 0 pour FF :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$. ✓

2. La somme des probabilités doit valoir 1 : $P(X = 3) = 1 - 0{,}2 - 0{,}5 = 0{,}3$.

3. $Y = 1$ correspond à l'unique face 6, donc $P(Y = 1) = \frac{1}{6}$; $Y = 0$ correspond aux cinq autres faces, donc $P(Y = 0) = \frac{5}{6}$. Vérification : $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$.

Corrigé de l'exercice 2.

1.

a) La somme des probabilités est $0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1$: la loi est bien définie.

b) $E(X) = (-1) \times 0{,}2 + 0 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}4 + 5 \times 0{,}1 = -0{,}2 + 0 + 0{,}8 + 0{,}5 = 1{,}1$.

2. $E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Si l'on répète un grand nombre de fois les deux lancers, on obtient en moyenne un « pile » par expérience.

3. Chaque face a la probabilité $\frac{1}{6}$: $E(Z) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3{,}5$. Ce n'est pas une valeur possible de Z (un dé n'affiche jamais 3,5) : l'espérance est la **moyenne** des résultats sur un très grand nombre de lancers, pas un résultat attendu à chaque lancer.

Corrigé de l'exercice 3.

1.

a) $E(X^2) = (-1)^2 \times 0{,}2 + 0^2 \times 0{,}3 + 2^2 \times 0{,}4 + 5^2 \times 0{,}1 = 0{,}2 + 0 + 1{,}6 + 2{,}5 = 4{,}3$.

b) $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 4{,}3 - 1{,}1^2 = 4{,}3 - 1{,}21 = 3{,}09$, donc $\sigma(X) = \sqrt{3{,}09} \approx 1{,}76$.

2. $\mathrm{E}(Z^2) = \dfrac{1}{6}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right) = \dfrac{1+4+9+16+25+36}{6} = \dfrac{91}{6}$.

$$\mathrm{V}(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - \big(\mathrm{E}(Z)\big)^2 = \frac{91}{6} - 3{,}5^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4}$$
$$\mathrm{V}(Z) = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12} \approx 2{,}92$$

et $\sigma(Z) = \sqrt{\dfrac{35}{12}} \approx 1{,}71$.

3. $\mathrm{E}(Y) = 0 \times \dfrac{5}{6} + 1 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6}$. Comme Y ne prend que les valeurs 0 et 1, on a $Y^2 = Y$, donc $\mathrm{E}(Y^2) = \dfrac{1}{6}$. Alors

$$\mathrm{V}(Y) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36} \approx 0{,}14 \qquad \text{et} \qquad \sigma(Y) = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6} \approx 0{,}37.$$

Corrigé de l'exercice 4.

1. $\mathrm{E}(Y) = 2\,\mathrm{E}(X) + 3 = 2 \times 1{,}1 + 3 = 5{,}2$; $\mathrm{V}(Y) = 2^2\,\mathrm{V}(X) = 4 \times 3{,}09 = 12{,}36$; $\sigma(Y) = \sqrt{12{,}36} \approx 3{,}52$. On remarque que $\sigma(Y) = 2\,\sigma(X)$: multiplier par 2 double l'écart-type, et ajouter 3 ne change pas la dispersion.
2. $Z = -X + 10$, donc $\mathrm{E}(Z) = -\mathrm{E}(X) + 10 = -1{,}1 + 10 = 8{,}9$ et $\mathrm{V}(Z) = (-1)^2\,\mathrm{V}(X) = 3{,}09$. Changer le signe ne modifie pas la variance.
3. $\mathrm{E}(F) = 1{,}8\,\mathrm{E}(T) + 32 = 1{,}8 \times 20 + 32 = 36 + 32 = 68$. Pour l'écart-type, $\mathrm{V}(F) = 1{,}8^2\,\mathrm{V}(T) = 3{,}24 \times 4 = 12{,}96$, donc $\sigma(F) = \sqrt{12{,}96} = 3{,}6$. On retrouve $\sigma(F) = 1{,}8\,\sigma(T)$: l'écart-type est multiplié par 1,8, et le décalage de 32 n'intervient pas.

Corrigé de l'exercice 5.

1. Le gain net vaut $10 - 3 = 7$ (probabilité 0,1), $5 - 3 = 2$ (probabilité 0,2) ou $0 - 3 = -3$ (probabilité 0,7) :

g_i	7	2	-3
$\mathrm{P}(G = g_i)$	0,1	0,2	0,7

2. $\mathrm{E}(G) = 7 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}2 + (-3) \times 0{,}7 = 0{,}7 + 0{,}4 - 2{,}1 = -1$.
3. L'espérance de gain est -1 € : en moyenne, le joueur perd 1 € par partie. Le jeu n'est **pas** favorable au joueur (il serait équitable si l'espérance était nulle).
4. Notons B la somme reçue, sans tenir compte du prix : $\mathrm{E}(B) = 10 \times 0{,}1 + 5 \times 0{,}2 + 0 \times 0{,}7 = 1 + 1 = 2$ €. Le jeu est équitable lorsque le prix de la partie est égal à cette espérance : il faudrait fixer le prix à 2 €. On peut aussi raisonner avec le gain net : $\mathrm{E}(G) = \mathrm{E}(B) - p = 0 \iff p = \mathrm{E}(B) = 2$.
5. $\mathrm{E}(G^2) = 7^2 \times 0{,}1 + 2^2 \times 0{,}2 + (-3)^2 \times 0{,}7 = 4{,}9 + 0{,}8 + 6{,}3 = 12$, donc $\mathrm{V}(G) = 12 - (-1)^2 = 11$ et $\sigma(G) = \sqrt{11} \approx 3{,}32$. Vérification par la transformation affine : $G = B - 3$, donc $\mathrm{V}(G) = \mathrm{V}(B)$; or $\mathrm{E}(B^2) = 100 \times 0{,}1 + 25 \times 0{,}2 = 15$ et $\mathrm{V}(B) = 15 - 2^2 = 11$. ✓

Corrigé de l'exercice 6.

1. $E(X_1) = 50 \times 0{,}1 + 0 \times 0{,}9 = 5$ et $E(X_2) = 4 \times 0{,}5 + 6 \times 0{,}5 = 2 + 3 = 5$. Les deux loteries rapportent en moyenne la même somme.
2. Pour la loterie 1 : $E(X_1^2) = 50^2 \times 0{,}1 + 0^2 \times 0{,}9 = 250$, donc $V(X_1) = 250 - 5^2 = 225$ et $\sigma(X_1) = \sqrt{225} = 15$. Pour la loterie 2 : $E(X_2^2) = 4^2 \times 0{,}5 + 6^2 \times 0{,}5 = 8 + 18 = 26$, donc $V(X_2) = 26 - 5^2 = 1$ et $\sigma(X_2) = 1$.
3. La loterie 1 est beaucoup plus risquée : son écart-type de 15 € traduit des résultats très dispersés autour de la moyenne (le plus souvent 0 €, rarement 50 €). La loterie 2 a un écart-type de 1 € : la somme reçue est toujours proche de 5 €. À espérance égale, l'écart-type mesure le risque.
4. Le billet coûte 5 € et l'espérance de la somme reçue est 5 € dans les deux cas : le gain net a une espérance nulle, les deux jeux sont équitables.

Corrigé de l'exercice 7.

1. **Réponse A.** $E(X) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}2 = 0 + 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$.
   - B (1) : moyenne simple des valeurs $\dfrac{0+1+2}{3}$, sans pondération par les probabilités.
   - C (3) : somme des valeurs, sans les probabilités.
   - D (1,1) : c'est $E(X^2) = 0 + 0{,}3 + 0{,}8$, pas $E(X)$.
2. **Réponse C.** Par définition, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
   - A : confusion entre variance et écart-type.
   - B : c'est l'inverse : $V(X) = \sigma(X)^2$.
   - D : la variance vaut $E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$, avec un carré, et il manque la racine.
3. **Réponse B.** $E(Y) = E(2X - 1) = 2\,E(X) - 1 = 6 - 1 = 5$.
   - A (6) : le -1 a été oublié.
   - C (2) : le facteur 2 a été oublié $(3 - 1)$.
   - D (3) : on a cru que l'espérance ne changeait pas.
4. **Réponse D.** $V(Y) = V(3X) = 3^2\,V(X) = 9 \times 4 = 36$.
   - A (12) : on a multiplié par 3 au lieu de 3^2 ; c'est l'écart-type qui est multiplié par 3, pas la variance.
   - B (4) : on a cru que la variance ne changeait pas ; c'est vrai pour une addition de constante, pas pour une multiplication.
   - C (7) : on a ajouté 3 à la variance.

Corrigé de l'exercice 8.

A. **Vrai.** Les valeurs x_i recouvrent toutes les issues possibles : la somme des $P(X = x_i)$ vaut 1. C'est la première vérification à faire sur un tableau de loi.

B. **Faux.** Contre-exemple : pour le numéro d'un dé, $E(X) = 3{,}5$, qui n'est pas une face du dé. L'espérance est une moyenne, pas une valeur possible.

C. **Faux.** La variance est la moyenne pondérée des carrés des écarts à l'espérance : c'est une somme de termes positifs, elle est toujours positive ou nulle. Une variance négative signale une erreur de calcul, souvent $E(X)^2 - E(X^2)$ au lieu de $E(X^2) - E(X)^2$.

D. **Vrai.** $E(X) = 5$ et $E(X^2) = 25$, donc $V(X) = 25 - 5^2 = 0$. Une variable constante n'a aucune dispersion.

E. **Vrai.** C'est la propriété $E(aX + b) = a\,E(X) + b$ avec $a = 1$ et $b = 10$.

F. **Faux.** $V(aX + b) = a^2\,V(X)$, donc $V(X + 10) = V(X)$. Ajouter une constante décale toutes les valeurs sans modifier leur dispersion.

G. **Vrai.** Si $E(G) = 0$, le jeu lui est défavorable ; si $E(G) > 0$, il lui est favorable.

H. **Faux.** $E(X^2) = V(X) + \big(E(X)\big)^2 = V(X) + 4 \geqslant 4$, avec égalité seulement si $V(X) = 0$. Contre-exemple : X vaut 0 ou 4 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ chacune ; alors $E(X) = 2$ mais $E(X^2) = \dfrac{0 + 16}{2} = 8$.