Les variables aléatoires — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur les variables aléatoires. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver les définitions et les formules de l'espérance, de la variance et de l'écart-type. Commence toujours par écrire la loi de probabilité dans un tableau.

Exercice 1 ***Construire une loi de probabilité*** **(*1re*).**

1. On lance deux fois de suite une pièce équilibrée et on note X le nombre de « pile » obtenus.
   a) Lister les quatre issues possibles de l'expérience.

      . . . . . .

   b) Donner la loi de probabilité de X dans un tableau.

x_i			
$P(X = x_i)$			

   c) Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.

      . . . . . .

2. Compléter la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,5	.....

3. On lance un dé équilibré. La variable aléatoire Y vaut 1 si le résultat est 6, et 0 sinon. Donner la loi de probabilité de Y.
   P(Y = 1) = ... P(Y = 0) = ...

Exercice 2 ***Calculer une espérance, étape par étape*** **(*1re*).**

1. La variable aléatoire X a la loi de probabilité suivante.

x_i	−1	0	2	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,4	0,1

   a) Vérifier que cette loi est bien définie.

      . . . . . .

   b) Compléter : E(X) = (−1)×..... +0×..... +2×..... +5×..... = ... + ... + ... + ... = ...

2. Calculer l'espérance du nombre de « pile » obtenus en deux lancers (variable X de l'exercice 1). Interpréter le résultat.

3. On lance un dé équilibré et on note Z le numéro obtenu. Calculer E(Z). Ce résultat est-il une valeur possible de Z ? Que représente-t-il ?

Exercice 3 ***Variance et écart-type*** **(*1re*).**

1. On reprend la variable aléatoire X de l'exercice 2, de loi $P(X = -1) = 0{,}2$, $P(X = 0) = 0{,}3$, $P(X = 2) = 0{,}4$, $P(X = 5) = 0{,}1$, pour laquelle $E(X) = 1{,}1$.
   a) Calculer $E(X^2)$.

   . . . . . .

   . . . . . .

   b) En déduire V(X), puis $\sigma(X)$ (arrondir au centième).

   . . . . . .

   . . . . . .

2. On reprend la variable Z (numéro obtenu avec un dé équilibré), pour laquelle $E(Z) = 3{,}5$. Calculer $E(Z^2)$, V(Z) et $\sigma(Z)$ (arrondir au centième).

3. On reprend la variable Y de l'exercice 1 (qui vaut 1 si le dé donne 6, et 0 sinon). Calculer E(Y), V(Y) et $\sigma(Y)$ (arrondir au centième).

Exercice 4 ***Transformation affine*** **(*1re*).** La variable aléatoire X vérifie E(X) = 1,1 et V(X) = 3,09.

1. On pose Y = 2X + 3. Calculer E(Y), V(Y) et σ(Y) (arrondir au centième).
   E(Y) = ... V(Y) = ... σ(Y) = ...
2. On pose Z = 10 − X. Calculer E(Z) et V(Z).
   E(Z) = ... V(Z) = ...
3. La température T d'une pièce, en degrés Celsius, est une variable aléatoire d'espérance 20 et d'écart-type 2. En degrés Fahrenheit, cette température s'écrit F = 1,8 T + 32. Calculer E(F) et σ(F).

Exercice 5 ***Problème en contexte : un jeu*** **(*1re*).** Un jeu coûte 3 € la partie. On tire une boule : on gagne 10 € avec une probabilité de 0,1, 5 € avec une probabilité de 0,2, et rien avec une probabilité de 0,7. On note G le gain net (somme reçue moins le prix de la partie).

1. Donner la loi de probabilité de G.

g_i			
P(G = g_i)			

2. Calculer E(G).

   .....

   .....

3. Le jeu est-il favorable au joueur ? Justifier.

   .....

   .....

4. Quel devrait être le prix de la partie pour que le jeu soit équitable ?

5. Calculer V(G) et σ(G) (arrondir au centième).

Exercice 6 ***Problème en contexte : comparer deux loteries*** **(*1re*).** Deux loteries proposent chacune des billets à 5 €. Pour la loterie 1, le billet rapporte 50 € avec une probabilité de 0,1 et rien sinon ; on note X_1 la somme reçue. Pour la loterie 2, le billet rapporte 4 € avec une probabilité de 0,5 et 6 € sinon ; on note X_2 la somme reçue.

1. Calculer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
   $E(X_1) =$ ..... $E(X_2) =$ .....
2. Calculer $V(X_1)$, $\sigma(X_1)$, $V(X_2)$ et $\sigma(X_2)$.
3. Quelle loterie est la plus « risquée » ? Interpréter les écarts-types.

   .....

   .....

   .....
4. Ces jeux sont-ils équitables ?

   .....

   .....

Exercice 7 ***QCM*** **(*1re*).** Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. La variable aléatoire X a pour loi $P(X = 0) = 0{,}5$, $P(X = 1) = 0{,}3$ et $P(X = 2) = 0{,}2$. Alors $E(X)$ vaut :

   A. 0,7 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 1,1
2. L'écart-type $\sigma(X)$ est égal à :

   A. $V(X)$ **B.** $V(X)^2$ **C.** $\sqrt{V(X)}$ **D.** $E(X^2) - E(X)$
3. Si $E(X) = 3$ et $Y = 2X - 1$, alors $E(Y)$ vaut :

   A. 6 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 3
4. Si $V(X) = 4$ et $Y = 3X$, alors $V(Y)$ vaut :

   A. 12 **B.** 4 **C.** 7 **D.** 36

Exercice 8 ***Vrai ou faux ?.*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. La somme des probabilités d'une loi de probabilité vaut toujours 1.

B. L'espérance d'une variable aléatoire est toujours l'une des valeurs prises par cette variable.

C. Une variance peut être négative.

D. Si X prend toujours la valeur 5, alors $V(X) = 0$.

E. $E(X + 10) = E(X) + 10$.

F. $V(X + 10) = V(X) + 10$.

G. Un jeu est équitable lorsque l'espérance du gain net est nulle.

H. Si $E(X) = 2$, alors $E(X^2) = 4$.