Les types de raisonnement en mathématiques

En mathématiques, il existe plusieurs façons de démontrer qu'un résultat est vrai. Chaque type de raisonnement a sa logique, sa structure et ses situations d'usage. Cette fiche les présente avec leur mécanisme et un exemple pour chacun.

① Le raisonnement direct

C'est le raisonnement le plus naturel : on part des hypothèses et on arrive à la conclusion par une suite d'étapes logiques. Chaque étape s'appuie sur une propriété, une définition ou un résultat déjà établi.

Structure logique : on sait que … or … donc (conclusion).

Ce n'est pas une formule à recopier mot pour mot : c'est le squelette logique de chaque étape.

- « On sait que » désigne les hypothèses ou les données ;
- « or » introduit la propriété ou le théorème qu'on utilise ;
- « donc » tire la conclusion.

Dans la rédaction réelle, ces connecteurs peuvent prendre d'autres formes : « par définition », « comme », « d'après le théorème de », etc.

Dans une démonstration longue, on enchaîne plusieurs blocs de ce type. La conclusion d'une étape devient le « on sait que » de l'étape suivante.

Exemple. *Montrer que la somme de deux nombres pairs est paire.*

Soient a et b deux nombres pairs. Par définition, il existe deux entiers k et ℓ tels que $a = 2k$ et $b = 2\ell$. ← « on sait que »

On calcule leur somme :

$$a + b = 2k + 2\ell = 2(k + \ell)$$

Comme $k + \ell$ est un entier, $a + b$ s'écrit sous la forme $2 \times$ (entier). ← « or » (définition de pair)

Donc $a + b$ est pair. ← « donc » (conclusion)

Quand l'utiliser : c'est le raisonnement à essayer en premier. Il fonctionne chaque fois qu'un chemin direct existe entre les hypothèses et la conclusion.

② Le raisonnement par l'absurde

Le principe est le suivant : on veut montrer qu'un résultat est vrai, mais on ne voit pas comment le démontrer directement. Alors on suppose le contraire, c'est-à-dire que le résultat est faux. On raisonne à partir de cette supposition, et on finit par tomber sur quelque chose d'impossible

(par exemple, un nombre qui serait à la fois pair et impair, ou une quantité positive et négative en même temps). Cette impossibilité prouve que la supposition de départ était fausse. Donc le résultat initial est bien vrai.

Structure : supposons le contraire du résultat … on raisonne … on aboutit à une impossibilité … donc le résultat est vrai.

Exemple. *Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.*

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Il existe alors deux entiers p et q $(q \neq 0)$, premiers entre eux, tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

En élevant au carré : $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$, donc $p^2 = 2q^2$.

Alors p^2 est pair, donc p est pair : il existe un entier k tel que $p = 2k$.
On remplace : $(2k)^2 = 2q^2$, donc $4k^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2k^2$.
Alors q^2 est pair, donc q est pair.
Mais si p et q sont tous deux pairs, ils ne sont pas premiers entre eux : **contradiction** avec l'hypothèse de départ. Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Quand l'utiliser : quand on doit montrer qu'une situation est impossible, ou quand le raisonnement direct ne mène nulle part.

③ Le raisonnement par contraposée

Pour montrer « si A alors B », on peut montrer à la place « si non B alors non A ». Ces deux énoncés disent exactement la même chose. Par exemple :

- « s'il pleut, alors le sol est mouillé » est équivalent à « si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas » ;
- « si n^2 est impair, alors n est impair » est équivalent à « si n est pair, alors n^2 est pair ».

On choisit la formulation la plus facile à démontrer.

Structure : au lieu de montrer $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$, *on montre* $\overline{\mathrm{B}} \Rightarrow \overline{\mathrm{A}}$.

Exemple. *Montrer que si n^2 est impair, alors n est impair.*

On montre la contraposée : si n est pair, alors n^2 est pair.
Si n est pair, il existe un entier k tel que $n = 2k$.
Alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$.
Comme $2k^2$ est un entier, n^2 est pair.
La contraposée est démontrée, donc l'énoncé initial est vrai : si n^2 est impair, alors n est impair.

Quand l'utiliser : quand la conclusion B *est difficile à exploiter directement, mais que sa négation donne un point de départ commode.*

④ Le raisonnement par récurrence

On veut montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$. On procède en deux étapes : on vérifie que $P(n_0)$ est vraie (initialisation), puis on montre que si $P(n)$ est vraie pour un certain rang n, alors $P(n+1)$ l'est aussi (hérédité).

Structure : initialisation (vérifier le premier rang) puis hérédité (passer d'un rang au suivant).

Exemple. *Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.*

Initialisation. Pour $n = 1$: le membre de gauche vaut 1 et le membre de droite vaut $\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$. La propriété est vraie au rang 1.
Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ un entier *quelconque*. Supposons que la propriété soit vraie au rang n, c'est-à-dire que $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, et montrons qu'elle l'est encore au rang $n+1$.
On calcule la somme au rang $n+1$:

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

C'est bien la formule au rang $n+1$. La propriété est héréditaire.
Conclusion. Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Quand l'utiliser : chaque fois qu'une propriété dépend d'un entier et que l'on peut relier le rang $n+1$ au rang n.

⑤ Le raisonnement par disjonction de cas

On sépare le problème en plusieurs cas qui couvrent toutes les situations possibles, et on traite chaque cas séparément. La conclusion est valable si elle est vraie dans chaque cas.

Structure : on distingue les cas … dans chaque cas, on montre que … donc la conclusion est vraie dans tous les cas.

Exemple. *Montrer que pour tout entier n, $n^2 + n$ est pair.*

On factorise : $n^2 + n = n(n+1)$. On distingue deux cas.
Cas 1 : n est pair. Alors $n(n+1)$ est le produit d'un nombre pair par un entier, donc $n(n+1)$ est pair.
Cas 2 : n est impair. Alors $n+1$ est pair, et $n(n+1)$ est le produit d'un entier par un nombre pair, donc $n(n+1)$ est pair.
Dans les deux cas, $n^2 + n$ est pair.

Quand l'utiliser : quand un raisonnement unique ne couvre pas tous les cas (parité, signe, position d'un point, etc.).

⑥ Démontrer ou réfuter : une différence fondamentale

Tous les raisonnements précédents servent à **démontrer** qu'un résultat est vrai. Mais si l'on te demande de montrer qu'un résultat est **faux**, un seul contre-exemple suffit. Par exemple, pour réfuter « tout nombre impair est premier », il suffit de constater que $9 = 3 \times 3$ est impair sans être premier. Aucune démonstration élaborée n'est nécessaire : un cas qui ne marche pas détruit l'affirmation.

⑦ Choisir le bon raisonnement

Face à un exercice de démonstration, commence toujours par le raisonnement direct. Si le chemin direct est bloqué, pose-toi ces questions :

- la propriété dépend-elle d'un entier n ? pense à la récurrence ;
- la conclusion est-elle de la forme « si A alors B » et B est difficile à exploiter ? essaie la contraposée ;
- doit-on montrer qu'une situation est impossible ? essaie l'absurde ;
- le problème comporte-t-il des cas de nature différente (pair/impair, positif/négatif) ? pense à la disjonction de cas.