Les suites numériques

Une suite est une liste ordonnée de nombres : un premier terme, un deuxième, un troisième, et ainsi de suite. On la note (u_n), et u_n désigne le terme de rang n. Les suites servent à modéliser tout ce qui évolue par étapes : un capital qui rapporte des intérêts chaque année, une population qui croît, un médicament qui s'élimine. Deux familles reviennent sans cesse : les suites arithmétiques (on ajoute toujours le même nombre) et les suites géométriques (on multiplie toujours par le même nombre). La difficulté est de ne pas les confondre.

Prérequis : Puissances, Proportionnalité. **Pour s'entraîner :** Exercices : suites numériques.

Définitions 1 (Vocabulaire et génération, 1re)

Suite : une suite (u_n) associe à chaque entier n un nombre u_n, appelé terme de rang n. Le premier terme est souvent u_0 (parfois u_1).
Génération explicite : u_n est donné directement en fonction de n, par une formule $u_n = f(n)$. On calcule n'importe quel terme sans connaître les précédents.
Génération par récurrence : on donne le premier terme et une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ qui passe d'un terme au suivant. Il faut calculer les termes de proche en proche.

Exemples **A.** Suite explicite $u_n = n^2 - 1$: $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 3$, $u_3 = 8$. On a calculé u_3 directement avec $3^2 - 1$.
B. Suite par récurrence $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 3v_n - 1$: $v_1 = 3 \times 2 - 1 = 5$, $v_2 = 3 \times 5 - 1 = 14$, $v_3 = 3 \times 14 - 1 = 41$. Ici, il faut v_2 pour obtenir v_3.

Exercice 1 *Calculer des termes (1re)*

1. La suite (u_n) est définie par $u_n = 3n - 2$. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_5.
2. La suite (v_n) est définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 3$. Calculer v_1, v_2 et v_3.
3. La suite (w_n) est définie par $w_n = n^2 + 1$. Compléter : $w_4 = \ldots^2 + 1 = \ldots$ Peut-on calculer w_{10} sans connaître w_9 ? Et v_{10} sans connaître v_9 ?
4. Pour la suite (u_n) de la question 1, exprimer u_{n+1} puis $u_n + 1$ en fonction de n. Expliquer la différence entre ces deux expressions.

Propriété 1 (Suites arithmétiques, 1re)

Une suite est **arithmétique** lorsqu'on passe d'un terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre** r, appelé raison : $u_{n+1} = u_n + r$.

Terme général : $u_n = u_0 + n\,r$ (à partir de u_0).
Sens de variation : si $r > 0$, la suite est croissante ; si $r < 0$, elle est décroissante ; si $r = 0$, elle est constante.

Exemple. Suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$. Alors $u_n = 5 + 3n$, donc $u_{10} = 5 + 3 \times 10 = 35$. Comme $r = 3 > 0$, la suite est croissante.

Exercice 2 *Suites arithmétiques (1re)*

1. La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$. Compléter : $u_1 = 5 + (\ldots) = \ldots$; $u_2 = \ldots$; $u_n = u_0 + n\,r = \ldots$; $u_{10} = \ldots$
2. La suite (u_n) est arithmétique, avec $u_0 = 7$ et $u_3 = 16$. Déterminer sa raison r, puis exprimer u_n en fonction de n et calculer u_{20}.
3. La suite (v_n) est arithmétique, avec $v_2 = 11$ et $v_5 = 26$. Déterminer sa raison r et son premier terme v_0, puis exprimer v_n en fonction de n.

Propriété 2 (Suites géométriques, 1re)

Une suite est **géométrique** lorsqu'on passe d'un terme au suivant en **multipliant toujours par le même nombre** q, appelé raison : $u_{n+1} = u_n \times q$.

Terme général : $u_n = u_0 \times q^n$ (à partir de u_0).
Sens de variation (cas $u_0 > 0$) : si $q > 1$, la suite est croissante ; si $0 < q < 1$, elle est décroissante ; si $q = 1$, elle est constante.

Exemple. Suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 3$. Alors $v_n = 2 \times 3^n$, donc $v_4 = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$. Comme $v_0 = 2 > 0$ et $q = 3 > 1$, la suite est croissante.

Méthode : reconnaître la nature d'une suite

1. Calculer les différences $u_1 - u_0$, $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$. Si elles sont toutes égales, la suite est arithmétique et cette valeur commune est la raison r.
2. Sinon, calculer les quotients $\dfrac{u_1}{u_0}$, $\dfrac{u_2}{u_1}$, $\dfrac{u_3}{u_2}$. S'ils sont tous égaux, la suite est géométrique et cette valeur commune est la raison q.
3. Si ni les différences ni les quotients ne sont constants, la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

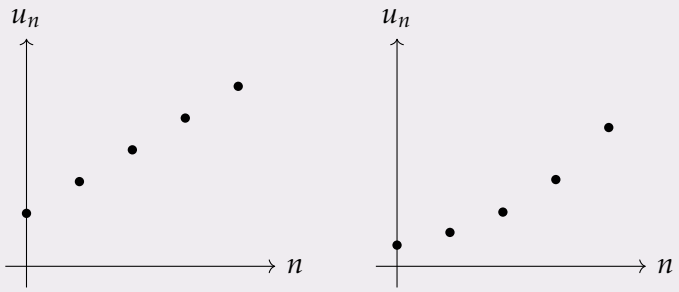
Exemple. Soit la suite 3, 6, 12, 24. Les différences sont 3, 6, 12 : elles ne sont pas constantes, la suite n'est pas arithmétique. Les quotients sont $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{12}{6} = 2$, $\frac{24}{12} = 2$: ils sont constants, la suite est géométrique de raison $q = 2$.

Exercice 3 *Suites géométriques (1^{re})*

1. La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $q = 2$. Compléter : $v_1 = 3 \times \ldots = \ldots$; $v_2 = \ldots$; $v_n = v_0 \times q^n = \ldots$; $v_5 = \ldots$
2. Pour chaque suite, calculer les quatre premiers termes, puis préciser sa nature (arithmétique, géométrique, ou ni l'une ni l'autre) en justifiant.
   a) $u_n = 7 - 2n$
   b) $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 2v_n$
   c) $w_n = n^2$
   d) $t_n = 5 \times 0{,}5^n$
3. La suite (v_n) est géométrique de raison 3 et vérifie $v_2 = 18$. Calculer v_0, puis v_4.

Propriété 3 (Représentation et sens de variation, 1^{re})

On représente une suite par des points isolés d'abscisses 0, 1, 2, ...Pour une suite arithmétique, les points sont **alignés** ; pour une suite géométrique (de premier terme positif), ils suivent une **courbe** de plus en plus raide (si $q > 1$). De façon générale, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$: si elle est positive pour tout n, la suite est croissante.



arithmétique (alignés) géométrique ($q > 1$)

Exercice 4 *Terme général et variations (1^{re})* La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 12$ et de raison $r = -1{,}5$. La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 100$ et de raison $q = 0{,}8$.

1. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_8.
2. La suite (u_n) est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.
3. À partir de quel rang a-t-on $u_n < 0$?
4. Exprimer v_n en fonction de n, puis calculer v_3.
5. La suite (v_n) est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.

Exercice 5 *Problème en contexte : deux placements (1^{re})* On place un capital de 2000 € sur un compte qui rapporte 4 % par an, les intérêts s'ajoutant chaque année au capital. On note C_n le capital, en euros, au bout de n années, avec $C_0 = 2000$.

1. Justifier que (C_n) est géométrique et préciser sa raison.
2. Exprimer C_n en fonction de n.
3. Calculer le capital au bout de 3 ans (arrondir au centime).
4. Un second placement de 2000 € rapporte 90 € d'intérêts fixes chaque année ; on note D_n le capital correspondant au bout de n années. Préciser la nature de la suite (D_n) et exprimer D_n en fonction de n.
5. Comparer C_3 et D_3, puis C_{10} et D_{10} (arrondir au centime). Que peut-on en conclure ?

Exercice 6 *Problème en contexte : modéliser deux évolutions (1^{re})*

1. Une ville compte 20 000 habitants en 2024 et perd 300 habitants chaque année. On note h_n le nombre d'habitants en 2024 + n.
   a) Préciser la nature de la suite (h_n) et exprimer h_n en fonction de n.
   b) Calculer h_5.
   c) En quelle année la population passera-t-elle pour la première fois sous 17 000 habitants ?
2. Un patient prend 200 mg d'un médicament. Chaque heure, l'organisme élimine 25 % de la quantité présente. On note m_n la quantité, en mg, restant dans l'organisme après n heures.
   a) Préciser la nature de la suite (m_n) et sa raison.
   b) Exprimer m_n en fonction de n.
   c) Calculer m_2 et m_4 (arrondir au dixième).

⚠ Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Confondre différence et quotient	« ×2 donc arithmétique »	ajouter → arithmétique, multiplier → géométrique
Se tromper de rang dans $u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 + (n+1)r$	$u_n = u_0 + n\,r$ (à partir de u_0)
Écrire $u_0 \times q \times n$	$u_n = u_0 \times q \times n$	$u_n = u_0 \times q^n$
Conclure les variations sans le signe de r ou la valeur de q	« ça augmente toujours »	comparer r à 0, ou q à 1

Exercice 7 *QCM (1^{re})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. La suite définie par $u_n = 4n + 1$ est :

   A. géométrique de raison 4 **B.** arithmétique de raison 1
   C. arithmétique de raison 4 **D.** ni arithmétique ni géométrique

2. La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison 2. Alors v_3 vaut :

   A. 40 **B.** 30 **C.** 11 **D.** 1000

3. Une suite arithmétique de raison -3 est :

   A. croissante **B.** décroissante
   C. constante **D.** on ne peut pas savoir sans connaître u_0

4. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 1$. Alors u_2 vaut :

   A. 3 **B.** 5 **C.** 63 **D.** 8

Exercice 8 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Si $u_{n+1} = u_n + 5$ pour tout n, alors la suite (u_n) est arithmétique de raison 5.

B. Si $u_{n+1} = 5\,u_n$ pour tout n, alors la suite (u_n) est arithmétique de raison 5.

C. Pour une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, on a $u_n = u_0 + n\,r$.

D. Une suite géométrique de raison $q > 1$ est toujours croissante.

E. La suite définie par $u_n = 2^n$ est géométrique de raison 2.

F. Si $u_0 = 4$ et $u_1 = 8$, alors la suite (u_n) est nécessairement géométrique de raison 2.

G. Une suite peut être à la fois arithmétique et géométrique.

H. La suite 1, 4, 9, 16, ... est géométrique.

*Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche **Que faire quand je bloque ?***
*Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche **Mémorisation et sciences cognitives**.*
*Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton **Carnet d'erreurs**.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. $u_0 = 3\times 0 - 2 = -2$; $u_1 = 3\times 1 - 2 = 1$; $u_2 = 3\times 2 - 2 = 4$; $u_5 = 3\times 5 - 2 = 13$.
2. $v_1 = 2\times 1 + 3 = 5$; $v_2 = 2\times 5 + 3 = 13$; $v_3 = 2\times 13 + 3 = 29$. Chaque terme se calcule à partir du précédent.
3. $w_4 = 4^2 + 1 = 17$. La suite (w_n) est définie de façon explicite : on calcule directement $w_{10} = 10^2 + 1 = 101$ sans passer par w_9. La suite (v_n) est définie par récurrence : pour obtenir v_{10}, il faut connaître v_9, donc calculer tous les termes de proche en proche.
4. $u_{n+1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 3 - 2 = 3n + 1$, alors que $u_n + 1 = (3n - 2) + 1 = 3n - 1$. L'expression u_{n+1} désigne le **terme suivant** (on remplace n par $n+1$ dans la formule) ; l'expression $u_n + 1$ désigne le terme de rang n **augmenté de** 1. Par exemple, pour $n = 2$: $u_3 = 7$ et $u_2 + 1 = 5$.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $u_1 = 5 + (-2) = 3$; $u_2 = 3 + (-2) = 1$; $u_n = u_0 + n\,r = 5 - 2n$; $u_{10} = 5 - 2\times 10 = -15$.
2. On utilise $u_3 = u_0 + 3r$: $16 = 7 + 3r$, donc $3r = 9$ et $r = 3$. Alors $u_n = 7 + 3n$ et $u_{20} = 7 + 3\times 20 = 67$.
3. Pour passer de v_2 à v_5, on ajoute trois fois la raison : $v_5 = v_2 + 3r$, donc $26 = 11 + 3r$, soit $r = 5$. Ensuite $v_2 = v_0 + 2r$, donc $v_0 = v_2 - 2r = 11 - 10 = 1$. Finalement $v_n = 1 + 5n$. Vérification : $v_5 = 1 + 25 = 26$. ✓

Corrigé de l'exercice 3.

1. $v_1 = 3\times 2 = 6$; $v_2 = 6\times 2 = 12$; $v_n = v_0 \times q^n = 3\times 2^n$; $v_5 = 3\times 2^5 = 3\times 32 = 96$.
2.
   a) $u_0 = 7$, $u_1 = 5$, $u_2 = 3$, $u_3 = 1$. Les différences valent -2 à chaque fois : suite arithmétique de raison $r = -2$.
   b) $v_0 = 3$, $v_1 = 6$, $v_2 = 12$, $v_3 = 24$. Chaque terme est le double du précédent : suite géométrique de raison $q = 2$.
   c) $w_0 = 0$, $w_1 = 1$, $w_2 = 4$, $w_3 = 9$. Les différences $(1, 3, 5)$ ne sont pas constantes : pas arithmétique. Les quotients $\dfrac{w_2}{w_1} = 4$ et $\dfrac{w_3}{w_2} = 2{,}25$ ne sont pas égaux : pas géométrique. La suite n'est ni arithmétique ni géométrique.
   d) $t_0 = 5$, $t_1 = 2{,}5$, $t_2 = 1{,}25$, $t_3 = 0{,}625$. Chaque terme est la moitié du précédent : suite géométrique de raison $q = 0{,}5$. On le lit directement sur la formule, qui est de la forme $t_0 \times q^n$.
3. $v_2 = v_0\times 3^2 = 9\,v_0$, donc $18 = 9\,v_0$ et $v_0 = 2$. Alors $v_4 = 2\times 3^4 = 2\times 81 = 162$. Vérification : $v_3 = 18\times 3 = 54$ et $v_4 = 54\times 3 = 162$. ✓

Corrigé de l'exercice 4.

1. $u_n = u_0 + n\,r = 12 - 1{,}5\,n$, donc $u_8 = 12 - 1{,}5\times 8 = 12 - 12 = 0$.

2. La raison $r = -1{,}5$ est négative, donc la suite est décroissante.
3. $u_n < 0 \iff 12 - 1{,}5n < 0 \iff 1{,}5n > 12 \iff n > 8$. Le premier rang qui convient est $n = 9$: $u_9 = 12 - 13{,}5 = -1{,}5 < 0$, alors que $u_8 = 0$.
4. $v_n = v_0 \times q^n = 100 \times 0{,}8^n$, donc $v_3 = 100 \times 0{,}8^3 = 100 \times 0{,}512 = 51{,}2$.
5. Le premier terme $v_0 = 100$ est positif et la raison vérifie $0 < q < 1$: la suite est décroissante. On le vérifie sur les premiers termes : 100, 80, 64, 51,2.

Corrigé de l'exercice 5.

1. Augmenter de 4 % revient à multiplier par $1 + \dfrac{4}{100} = 1{,}04$. On passe donc de C_n à C_{n+1} en multipliant toujours par 1,04 : la suite est géométrique de raison $q = 1{,}04$.
2. $C_n = C_0 \times q^n = 2000 \times 1{,}04^n$.
3. $C_3 = 2000 \times 1{,}04^3 = 2000 \times 1{,}124864 = 2249{,}73$ € (arrondi au centime).
4. On ajoute chaque année la même somme de 90 € : (D_n) est arithmétique de raison $r = 90$, et $D_n = 2000 + 90n$.
5. $D_3 = 2000 + 270 = 2270$ €, supérieur à $C_3 \approx 2249{,}73$ €. En revanche, $D_{10} = 2000 + 900 = 2900$ € alors que $C_{10} = 2000 \times 1{,}04^{10} \approx 2000 \times 1{,}480244 \approx 2960{,}49$ €. Le placement à intérêts fixes est meilleur les premières années, mais la croissance géométrique finit par l'emporter sur la croissance arithmétique : au bout de dix ans, le premier placement rapporte davantage.

Corrigé de l'exercice 6.

1.
   a) On retire chaque année la même quantité : (h_n) est arithmétique de raison $r = -300$, et $h_n = 20\,000 - 300n$.
   b) $h_5 = 20\,000 - 300 \times 5 = 18\,500$ habitants.
   c) $h_n < 17\,000 \iff 20\,000 - 300n < 17\,000 \iff 300n > 3\,000 \iff n > 10$. Le premier rang est $n = 11$, soit l'année 2024 + 11 = 2035. Vérification : $h_{10} = 17\,000$ (pas encore strictement en dessous) et $h_{11} = 16\,700$.
2.
   a) Éliminer 25 % revient à conserver 75 %, c'est-à-dire à multiplier par 0,75 : (m_n) est géométrique de raison $q = 0{,}75$.
   b) $m_n = 200 \times 0{,}75^n$.
   c) $m_2 = 200 \times 0{,}75^2 = 200 \times 0{,}5625 = 112{,}5$ mg et $m_4 = 200 \times 0{,}75^4 = 200 \times 0{,}31640625 \approx 63{,}3$ mg.

Corrigé de l'exercice 7.

1. **Réponse C.** $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 1 - (4n+1) = 4$: la différence est constante, la suite est arithmétique de raison 4.

- A : le 4 multiplie n, pas le terme précédent ; on ajoute 4 d'un rang au suivant, on ne multiplie pas par 4.
- B : 1 est le premier terme u_0, pas la raison.
- D : les différences sont constantes, la suite est bien arithmétique.

2. **Réponse A.** $v_3 = v_0 \times q^3 = 5 \times 2^3 = 5 \times 8 = 40$.
   - B (30) : formule fausse $v_0 \times q \times n = 5 \times 2 \times 3$.
   - C (11) : formule d'une suite arithmétique $v_0 + 3 \times 2$.
   - D (1000) : puissance appliquée au produit, $(5 \times 2)^3$ au lieu de 5×2^3.
3. **Réponse B.** $u_{n+1} - u_n = -3 < 0$ pour tout n : la suite est décroissante, quel que soit u_0.
   - A : une raison négative fait diminuer les termes.
   - C : une suite arithmétique est constante seulement si $r = 0$.
   - D : pour une suite arithmétique, seul le signe de r compte. C'est pour une suite géométrique que le signe du premier terme intervient.
4. **Réponse D.** $u_1 = u_0^2 - 1 = 4 - 1 = 3$, puis $u_2 = u_1^2 - 1 = 9 - 1 = 8$.
   - A (3) : on s'est arrêté à u_1.
   - B (5) : u_n^2 a été confondu avec $2u_n$, ce qui donne $2 \times 3 - 1 = 5$.
   - C (63) : on a calculé un terme de trop, $u_3 = 8^2 - 1 = 63$.

Corrigé de l'exercice 8.

A. Vrai. On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours 5 : c'est la définition d'une suite arithmétique de raison 5.

B. Faux. On passe d'un terme au suivant en *multipliant* par 5 : la suite est géométrique de raison 5, pas arithmétique.

C. Vrai. Pour passer de u_0 à u_n, on ajoute n fois la raison.

D. Faux. Cela dépend du signe du premier terme. Contre-exemple : $u_0 = -1$ et $q = 2$ donnent $-1, -2, -4, -8, \ldots$, suite décroissante. La règle « $q > 1$ donc croissante » ne vaut que si $u_0 > 0$.

E. Vrai. $u_0 = 2^0 = 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2\,u_n$: la suite est géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

F. Faux. Deux termes ne suffisent pas à déterminer la nature d'une suite. La suite pourrait être arithmétique de raison 4 (4, 8, 12, …), géométrique de raison 2 (4, 8, 16, …), ou ni l'un ni l'autre.

G. Vrai. Une suite constante non nulle, par exemple 3, 3, 3, …, est arithmétique de raison $r = 0$ et géométrique de raison $q = 1$.

H. Faux. Les quotients $\frac{4}{1} = 4$, $\frac{9}{4} = 2{,}25$ et $\frac{16}{9} \approx 1{,}78$ ne sont pas constants. Ce sont les carrés des entiers ($u_n = (n+1)^2$), la suite n'est ni géométrique ni arithmétique (différences 3, 5, 7).