Suites : récurrence et limites

En première, on a appris à calculer les termes d'une suite et à reconnaître sa nature. En terminale, deux questions nouvelles se posent : comment **prouver** qu'une formule est vraie pour tous les entiers, et que devient u_n lorsque n devient très grand ? La première question se traite par le **raisonnement par récurrence**, une démonstration en deux temps qui fonctionne comme une chaîne de dominos. La seconde est la question de la **limite** : la suite se rapproche-t-elle d'un nombre, s'envole-t-elle vers l'infini, ou n'a-t-elle aucune limite ? La difficulté principale est de rédiger la récurrence sans oublier d'étape, et de ne pas conclure trop vite face à une forme indéterminée.

Prérequis : Suites numériques, Puissances. **Pour s'entraîner :** Exercices : suites, récurrence et limites.

Propriété 1 (Le raisonnement par récurrence, T^le)

On veut prouver qu'une propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$. Le principe de récurrence dit qu'il suffit de vérifier deux choses :

Initialisation : $\mathrm{P}(n_0)$ est vraie (le premier domino tombe).
Hérédité : pour un entier $n \geqslant n_0$ **fixé**, si $\mathrm{P}(n)$ est vraie, alors $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie (chaque domino renverse le suivant).

On conclut alors que $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$. Les deux étapes sont indispensables : sans initialisation, aucun domino ne tombe ; sans hérédité, la chute s'arrête.

Méthode : rédiger une récurrence

1. Énoncer clairement la propriété $\mathrm{P}(n)$ (une égalité, une inégalité, une divisibilité).
2. **Initialisation** : vérifier $\mathrm{P}(n_0)$ par un calcul explicite.
3. **Hérédité** : écrire « Soit $n \geqslant n_0$. Supposons $\mathrm{P}(n)$ vraie » (hypothèse de récurrence), puis *utiliser* cette hypothèse pour établir $\mathrm{P}(n+1)$.
4. **Conclusion** : « $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ ».

Exemple. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Montrons que pour tout n, $u_n = 2^n + 1$.
Initialisation. $2^0 + 1 = 2 = u_0$: P(0) est vraie.
Hérédité. Soit $n \geqslant 0$. Supposons $u_n = 2^n + 1$. Alors

$$u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2(2^n + 1) - 1 \qquad \text{(hypothèse de récurrence)}$$
$$u_{n+1} = 2^{n+1} + 2 - 1 = 2^{n+1} + 1.$$

Donc P$(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 2^n + 1$.

Exercice 1 *Rédiger une récurrence, étape par étape (T^{le})* La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. On veut montrer que pour tout entier n, $u_n = 3 \times 2^n - 1$. Compléter la démonstration.

1. **Initialisation.** $3 \times 2^{\cdots} - 1 = \ldots$ et $u_0 = \ldots$: la propriété est vraie au rang 0.
2. **Hérédité.** Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = \ldots$ Alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(\ldots) + 1 = \ldots - 2 + 1 = 3 \times 2^{\cdots} - 1$.
3. **Conclusion.** ...
4. Vérifier la formule en calculant u_1 et u_2 de deux façons.

Exercice 2 *Démontrer par récurrence (T^{le})*

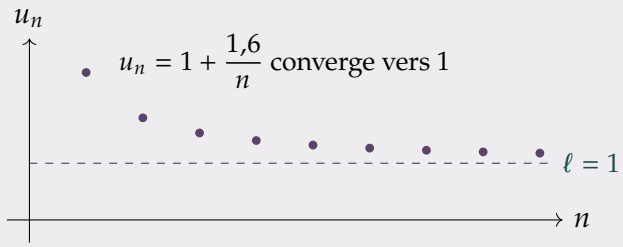
1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $4^n - 1$ est un multiple de 3.
3. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. Montrer que pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

Propriété 2 (Limite d'une suite, T^le)

Suite convergente : (u_n) **converge** vers le réel ℓ si u_n se rapproche de ℓ autant qu'on veut lorsque n grandit : tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Suite divergente vers $+\infty$: u_n dépasse n'importe quel nombre A à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (de même vers $-\infty$).

Pas de limite : certaines suites ne convergent pas et ne tendent pas vers l'infini, comme $u_n = (-1)^n$, qui alterne entre -1 et 1.



Propriété 3 (Limites de référence, T^le)

Suite	Limite quand $n \to +\infty$
$n,\ n^2,\ n^3,\ \sqrt{n}$	$+\infty$
$\frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2},\ \frac{1}{\sqrt{n}}$	0
q^n avec $q > 1$	$+\infty$
q^n avec $-1 < q < 1$	0
q^n avec $q = 1$	1
q^n avec $q \leqslant -1$	pas de limite

Pour une suite géométrique $u_n = u_0 \times q^n$, tout dépend donc de la raison q : si $-1 < q < 1$, elle converge vers 0 ; si $q > 1$ et $u_0 > 0$, elle tend vers $+\infty$.

Exercice 3 *Limites de référence et suites géométriques (T^{le})*

1. Donner la limite de chaque suite, en justifiant par une limite de référence.

   a) $u_n = 5 + \frac{1}{n}$ b) $v_n = 3n^2 - 7$

   c) $w_n = 0{,}8^n$ d) $x_n = 2 \times 1{,}05^n$

   e) $y_n = 1 - \frac{3}{n^2}$ f) $z_n = (-2)^n$

2. Un capital de 2000 € est placé à 4 % par an : $C_n = 2000 \times 1{,}04^n$. Donner la limite de (C_n) et l'interpréter.

3. Un médicament s'élimine de 25 % par heure : $m_n = 200 \times 0{,}75^n$ (en mg). Donner la limite de (m_n) et l'interpréter.

Propriété 4 (Opérations sur les limites, T^le)

Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$ (réels), alors $u_n + v_n \to \ell + \ell'$, $u_n v_n \to \ell\ell'$ et, si $\ell' \neq 0$, $\dfrac{u_n}{v_n} \to \dfrac{\ell}{\ell'}$. Avec des limites infinies, les règles sont celles du bon sens ($\ell + \infty = \infty$, $\ell \times (+\infty) = \pm\infty$ selon le signe de $\ell \neq 0$, $\dfrac{\ell}{\pm\infty} = 0$), **sauf** dans quatre cas où l'on ne peut pas conclure directement, les **formes indéterminées** :

$$\text{« } + \infty - \infty \text{ »}, \qquad \text{«} 0 \times \infty \text{ »}, \qquad \text{«} \frac{\infty}{\infty} \text{ »}, \qquad \text{«} \frac{0}{0} \text{ ».}$$

Méthode : lever une forme indéterminée

1. Repérer le **terme dominant** (la plus grande puissance de n, ou la plus grande base pour des puissances).
2. Le mettre en facteur au numérateur et au dénominateur.
3. Les autres termes tendent alors vers 0 et la limite se lit directement.

Exemples **A.** $u_n = n^2 - 4n$ est de la forme « $+\infty - \infty$ ». On factorise : $u_n = n^2\left(1 - \dfrac{4}{n}\right)$. Or $n^2 \to +\infty$ et $1 - \dfrac{4}{n} \to 1$, donc $u_n \to +\infty$.

B. $v_n = \dfrac{3n+2}{n-1}$ est de la forme « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ». On factorise par n : $v_n = \dfrac{n\left(3 + \frac{2}{n}\right)}{n\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \dfrac{3 + \frac{2}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \to \dfrac{3}{1} = 3$.

Exercice 4 *Lever une forme indéterminée, étape par étape (T^le)*

1. Compléter : $u_n = 3n^2 - 5n + 1 = n^2\left(3 - \dfrac{\dots}{n} + \dfrac{\dots}{n^2}\right)$. Or $n^2 \to \dots$ et $3 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^2} \to \dots$, donc $u_n \to \dots$
2. Compléter : $v_n = \dfrac{2n+1}{n+3} = \dfrac{n(\dots)}{n(\dots)} = \dfrac{2 + \frac{1}{n}}{\dots} \to \dfrac{\dots}{\dots} = \dots$
3. Déterminer la limite de $w_n = \dfrac{5 \times 2^n + 1}{2^n}$.
4. Déterminer la limite de $x_n = n - \sqrt{n}$. *Indication :* $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$.

Théorème 1 (Théorèmes de comparaison, T^le)

On suppose les inégalités vraies à partir d'un certain rang.

Comparaison : si $u_n \leqslant v_n$ et $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$. Si $u_n \leqslant v_n$ et $v_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.

Encadrement (gendarmes) : si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si u_n et w_n tendent vers le **même** réel ℓ, alors $v_n \to \ell$.

Ces théorèmes servent dès qu'une suite contient un terme borné mais sans limite, comme $(-1)^n$, $\cos(n)$ ou $\sin(n)$.

Exemple. Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Comme $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, on a $-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. Or $-\dfrac{1}{n} \to 0$ et $\dfrac{1}{n} \to 0$: d'après le théorème des gendarmes, $u_n \to 0$.

Exercice 5 *Encadrer pour conclure (T^le)* Déterminer la limite de chaque suite $(n \geqslant 1)$ à l'aide d'un théorème de comparaison.

1. $u_n = 2 + \dfrac{\sin(n)}{n}$
2. $v_n = n + \cos(n)$
3. $w_n = \dfrac{3 + (-1)^n}{n^2}$

Propriété 5 (Suites monotones et convergence, T^le)

Majorée, minorée : (u_n) est majorée par M si $u_n \leqslant$ M pour tout n ; minorée par m si $u_n \geqslant m$ pour tout n.

Théorème de convergence monotone : une suite **croissante et majorée** converge ; une suite **décroissante et minorée** converge. (Le théorème donne l'existence de la limite, pas sa valeur.)

Croissante non majorée : une suite croissante qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.

Limite d'une suite récurrente : si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue et si $u_n \to \ell$, alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. On trouve la limite en résolvant cette équation.

Méthode : étudier une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence un encadrement de u_n (souvent $a \leqslant u_n \leqslant b$).
2. Montrer que la suite est monotone (signe de $u_{n+1} - u_n$, en utilisant l'encadrement).
3. Conclure à la convergence par le théorème de convergence monotone.
4. Déterminer la limite en résolvant $f(\ell) = \ell$ et en retenant la solution compatible avec l'encadrement.

Exercice 6 *Problème en contexte : une suite récurrente* (T^{le}) On reprend la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. On a montré à l'exercice 2 que $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ pour tout n.

1. Calculer u_1 et u_2 (arrondir au millième). Que conjecture-t-on sur le sens de variation ?
2. Montrer que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ équivaut à $(u_n - 3)(u_n + 2) \leqslant 0$. En déduire que (u_n) est croissante.
3. Justifier que (u_n) converge.
4. Déterminer sa limite ℓ.

Exercice 7 *Problème en contexte : atteindre un seuil* (T^{le}) Un patient prend 200 mg d'un médicament ; chaque heure, l'organisme élimine 25 % de la quantité présente. On note m_n la quantité, en mg, après n heures : $m_n = 200 \times 0{,}75^n$.

1. Justifier que (m_n) est décroissante et donner sa limite.
2. Le médicament est considéré comme éliminé lorsque $m_n < 1$ mg. Compléter le tableau ci-dessous (arrondir au centième) et déterminer le premier rang n pour lequel $m_n < 1$.

n	16	17	18	19
m_n	…	…	…	…

3. Décrire un algorithme (en français ou en Python) qui calcule ce rang à partir de $m_0 = 200$.

⚠ Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Oublier l'initialisation	« l'hérédité est vraie, donc c'est démontré »	vérifier P(n_0) : sans premier domino, rien ne tombe
Supposer P(n) « pour tout n » dans l'hérédité	« supposons P(n) vraie pour tout n »	« soit n fixé, supposons P(n) vraie » : on suppose un seul rang
Conclure sur une forme indéterminée	$n^2 - n \to 0$ car « $\infty - \infty = 0$ »	factoriser : $n^2(1 - \frac{1}{n}) \to +\infty$
Croire que croissante suffit	« (u_n) croissante donc $u_n \to +\infty$ »	croissante et **non majorée** ; si elle est majorée, elle converge
Oublier le cas $q \leqslant -1$	$(-2)^n \to +\infty$	$(-2)^n$ n'a pas de limite (signe alterné)

Exercice 8 *QCM (T^{le})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. La limite de la suite $u_n = 0{,}3^n$ est :

   A. $+\infty$ **B.** $0{,}3$ **C.** 0 **D.** elle n'existe pas

2. La limite de la suite $v_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2-3}$ est :

   A. 2 **B.** $+\infty$ **C.** 0 **D.** $-\dfrac{1}{3}$

3. Dans une démonstration par récurrence, l'hérédité consiste à :

   A. vérifier que P(0) est vraie
   B. supposer P(n) vraie pour tout entier n
   C. calculer u_{n+1} à partir de u_n
   D. montrer que, pour un n fixé, P(n) vraie entraîne P($n+1$) vraie

4. Une suite croissante et majorée par 5 :

   A. tend vers 5
   B. converge vers un réel $\ell \leqslant 5$
   C. tend vers $+\infty$
   D. n'a pas de limite

Exercice 9 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Si $u_n \to 0$, alors $u_n = 0$ à partir d'un certain rang.

B. Toute suite croissante tend vers $+\infty$.

C. Pour tout réel q tel que $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

D. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n et $v_n \to 0$, alors $u_n \to 0$.

E. L'hérédité seule suffit à prouver qu'une propriété est vraie pour tout n.

F. La suite $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

G. Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$, alors $u_n + v_n \to 0$.

H. Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue et $u_n \to \ell$, alors $f(\ell) = \ell$.

*Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche **Que faire quand je bloque ?***
*Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche **Mémorisation et sciences cognitives**.*
*Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton **Carnet d'erreurs**.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. $3 \times 2^0 - 1 = 3 - 1 = 2$ et $u_0 = 2$: la propriété est vraie au rang 0.
2. Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = 3 \times 2^n - 1$. Alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(3 \times 2^n - 1) + 1 = 3 \times 2^{n+1} - 2 + 1 = 3 \times 2^{n+1} - 1$. La propriété est vraie au rang $n+1$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 3 \times 2^n - 1$.
4. Par la relation : $u_1 = 2 \times 2 + 1 = 5$ et $u_2 = 2 \times 5 + 1 = 11$. Par la formule : $3 \times 2 - 1 = 5$ et $3 \times 4 - 1 = 11$. ✓

Corrigé de l'exercice 2.

1. **Initialisation.** Pour $n = 1$: la somme vaut 1 et $\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$. Vraie. **Hérédité.** Soit $n \geqslant 1$. Supposons $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Alors

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$
$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

   qui est la formule au rang $n+1$. **Conclusion :** vraie pour tout $n \geqslant 1$.
2. **Initialisation.** $4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$: multiple de 3. **Hérédité.** Soit $n \geqslant 0$. Supposons $4^n - 1 = 3k$ avec k entier. Alors $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(3k+1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k+1)$, multiple de 3. **Conclusion :** $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout $n \geqslant 0$.
3. **Initialisation.** $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 3$. Vraie. **Hérédité.** Soit $n \geqslant 0$. Supposons $0 \leqslant u_n \leqslant 3$. Alors $6 \leqslant u_n + 6 \leqslant 9$, et comme la fonction racine carrée est croissante, $\sqrt{6} \leqslant \sqrt{u_n + 6} \leqslant 3$, donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$. **Conclusion :** pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

Corrigé de l'exercice 3.

1.
   a) $\dfrac{1}{n} \to 0$, donc $u_n \to 5$.
   b) $n^2 \to +\infty$, donc $3n^2 \to +\infty$ et $v_n \to +\infty$.
   c) $-1 < 0{,}8 < 1$, donc $w_n = 0{,}8^n \to 0$.
   d) $1{,}05 > 1$, donc $1{,}05^n \to +\infty$ et $x_n \to +\infty$.
   e) $\dfrac{3}{n^2} \to 0$, donc $y_n \to 1$.
   f) $-2 \leqslant -1$: la suite $(-2)^n$ alterne entre des valeurs positives et négatives de plus en plus grandes en valeur absolue, elle n'a pas de limite.
2. $1{,}04 > 1$, donc $1{,}04^n \to +\infty$ et $C_n \to +\infty$: le capital dépasse n'importe quelle somme si l'on attend assez longtemps (sans limite théorique).

3. $0 < 0{,}75 < 1$, donc $0{,}75^n \to 0$ et $m_n \to 0$: la quantité de médicament dans l'organisme tend vers zéro, sans jamais l'atteindre exactement.

Corrigé de l'exercice 4.

1. $u_n = n^2\left(3 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$. Or $n^2 \to +\infty$ et $3 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^2} \to 3$, donc $u_n \to +\infty$ (produit d'une suite tendant vers $+\infty$ par une suite tendant vers $3 > 0$).
2. $v_n = \dfrac{n\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \dfrac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \to \dfrac{2}{1} = 2.$
3. $w_n = \dfrac{5 \times 2^n}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = 5 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Comme $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$, $w_n \to 5$.
4. $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n} - 1\right)$. Or $\sqrt{n} \to +\infty$ et $\sqrt{n} - 1 \to +\infty$, donc $x_n \to +\infty$. La forme « $+\infty - \infty$ » est levée par la factorisation.

Corrigé de l'exercice 5.

1. $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$, donc $2 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{n}$. Les deux suites encadrantes tendent vers 2 : par le théorème des gendarmes, $u_n \to 2$.
2. $\cos(n) \geqslant -1$, donc $v_n \geqslant n - 1$. Or $n - 1 \to +\infty$: par comparaison, $v_n \to +\infty$.
3. $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $2 \leqslant 3 + (-1)^n \leqslant 4$ et $\dfrac{2}{n^2} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{4}{n^2}$. Les deux bornes tendent vers 0 : $w_n \to 0$.

Corrigé de l'exercice 6.

1. $u_1 = \sqrt{7} \approx 2{,}646$ et $u_2 = \sqrt{\sqrt{7} + 6} \approx \sqrt{8{,}646} \approx 2{,}941$. La suite semble croissante et se rapprocher de 3.
2. Comme $u_n \geqslant 0$ et $\sqrt{u_n + 6} \geqslant 0$, on a $\sqrt{u_n + 6} \geqslant u_n \iff u_n + 6 \geqslant u_n^2 \iff u_n^2 - u_n - 6 \leqslant 0$ (on élève au carré deux nombres positifs, ce qui conserve l'ordre). Le trinôme $x^2 - x - 6$ a pour racines 3 et -2, donc $u_n^2 - u_n - 6 = (u_n - 3)(u_n + 2)$. Or $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ donne $u_n - 3 \leqslant 0$ et $u_n + 2 > 0$: le produit est négatif ou nul. Donc $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout n : la suite est croissante.
3. (u_n) est croissante et majorée par 3 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ, avec $0 \leqslant \ell \leqslant 3$.
4. La fonction $f(x) = \sqrt{x + 6}$ est continue sur $[0\ ;\ 3]$, donc ℓ vérifie $\ell = \sqrt{\ell + 6}$, soit $\ell^2 - \ell - 6 = 0$, d'où $\ell = 3$ ou $\ell = -2$. Comme $\ell \geqslant 0$, $\ell = 3$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Corrigé de l'exercice 7.

1. $m_{n+1} = 0{,}75\, m_n < m_n$ car $m_n > 0$: la suite est décroissante. Comme $0 < 0{,}75 < 1$, $0{,}75^n \to 0$ et $m_n \to 0$.
2. $m_{16} = 200 \times 0{,}75^{16} \approx 2{,}00$; $m_{17} \approx 1{,}50$; $m_{18} \approx 1{,}13$; $m_{19} \approx 0{,}85$. Le premier rang pour lequel $m_n < 1$ est $n = 19$: le médicament est éliminé au bout de 19 heures.

3. On part de $n = 0$ et $m = 200$. Tant que $m \geqslant 1$: on remplace m par $0{,}75\,m$ et on ajoute 1 à n. À la sortie de la boucle, n est le rang cherché. En Python : `n = 0; m = 200; while m >= 1: m = 0.75 * m ; n = n + 1`; puis afficher `n`, qui vaut 19.

Corrigé de l'exercice 8.

1. **Réponse C.** $-1 < 0{,}3 < 1$, donc $0{,}3^n \to 0$.
   - A : c'est le cas $q > 1$.
   - B : la limite n'est pas la raison ; $0{,}3^n$ vaut 0,3 seulement pour $n = 1$.
   - D : la suite est géométrique de raison positive inférieure à 1, elle converge.
2. **Réponse A.** $v_n = \dfrac{n^2\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 - \frac{3}{n^2}\right)} \to \dfrac{2}{1} = 2.$
   - B : forme « $\frac{\infty}{\infty}$ » conclue trop vite ; les termes dominants se compensent.
   - C : confusion avec le cas où le dénominateur l'emporte.
   - D : quotient des termes constants, sans signification pour la limite.
3. **Réponse D.** L'hérédité est une implication : de $\mathrm{P}(n)$ (pour un rang fixé) on déduit $\mathrm{P}(n+1)$.
   - A : c'est l'initialisation.
   - B : supposer $\mathrm{P}(n)$ pour tout n revient à supposer ce qu'on veut démontrer.
   - C : calculer u_{n+1} n'est qu'un outil éventuel, pas le principe.
4. **Réponse B.** Théorème de convergence monotone : elle converge, et sa limite est inférieure ou égale au majorant.
   - A : le majorant n'est pas forcément la limite ($u_n = 1 - \frac{1}{n}$ est majorée par 5 et converge vers 1).
   - C : impossible, elle est majorée.
   - D : une suite croissante majorée a toujours une limite.

Corrigé de l'exercice 9.

A. Faux. $u_n = \dfrac{1}{n}$ tend vers 0 sans jamais valoir 0. Converger vers ℓ, c'est s'en rapprocher autant qu'on veut, pas l'atteindre.

B. Faux. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ est croissante et converge vers 1. Une suite croissante tend vers $+\infty$ seulement si elle n'est pas majorée.

C. Vrai. C'est la limite de référence des suites géométriques de raison strictement comprise entre -1 et 1.

D. Vrai. C'est le théorème des gendarmes avec $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$: les deux bornes tendent vers 0.

E. Faux. Contre-exemple : $\mathrm{P}(n)$: « 2^n est un multiple de 3 ». Si $2^n = 3k$, alors $2^{n+1} = 3 \times 2k$: l'hérédité est vraie. Pourtant $\mathrm{P}(0)$ est fausse $(1$ n'est pas multiple de $3)$, et $\mathrm{P}(n)$ est fausse pour tout n. Sans initialisation, rien n'est prouvé.

F. Vrai. Elle vaut alternativement 1 et -1 : elle ne se rapproche d'aucun réel et ne tend pas vers l'infini.

G. Faux. « $+\infty - \infty$ » est une forme indéterminée. Avec $u_n = n^2$ et $v_n = -n$, $u_n + v_n = n^2 - n \to +\infty$.

H. Vrai. En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, la continuité de f donne $\ell = f(\ell)$: la limite est un point fixe de f.