Suites : récurrence et limites — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur les suites en terminale. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver les trois étapes d'une récurrence, les limites de référence et les théorèmes de comparaison. Rédige chaque récurrence en entier : initialisation, hérédité, conclusion.

Exercice 1 ***Rédiger une récurrence, étape par étape*** **(*Tle*).** La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. On veut montrer que pour tout entier n, $u_n = 3 \times 2^n - 1$. Compléter la démonstration.

1. **Initialisation.** $3 \times 2^{\cdots\cdots} - 1 = \cdots\cdots$ et $u_0 = \cdots\cdots$: la propriété est vraie au rang 0.
2. **Hérédité.** Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = \cdots\cdots$
   Alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(\cdots\cdots) + 1 = \cdots\cdots - 2 + 1 = 3 \times 2^{\cdots\cdots} - 1$.
3. **Conclusion.** $\cdots\cdots$
4. Vérifier la formule en calculant u_1 et u_2 de deux façons.

Exercice 2 ***Démontrer par récurrence*** **(*Tle*).**

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $4^n - 1$ est un multiple de 3.

3. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. Montrer que pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

Exercice 3 *Limites de référence et suites géométriques* (T^{le})**.**

1. Donner la limite de chaque suite, en justifiant par une limite de référence.
   a) $u_n = 5 + \dfrac{1}{n}$: .....
   b) $v_n = 3n^2 - 7$: .....
   c) $w_n = 0{,}8^n$: .....
   d) $x_n = 2 \times 1{,}05^n$: .....
   e) $y_n = 1 - \dfrac{3}{n^2}$: .....
   f) $z_n = (-2)^n$: .....
2. Un capital de 2000 € est placé à 4 % par an : $C_n = 2000 \times 1{,}04^n$. Donner la limite de (C_n) et l'interpréter.

   .....

   .....

3. Un médicament s'élimine de 25 % par heure : $m_n = 200 \times 0{,}75^n$ (en mg). Donner la limite de (m_n) et l'interpréter.

   .....

   .....

Exercice 4 *Lever une forme indéterminée, étape par étape* (T^{le}).

1. Compléter : $u_n = 3n^2 - 5n + 1 = n^2\left(3 - \frac{\dots\dots}{n} + \frac{\dots\dots}{n^2}\right)$. Or $n^2 \to \dots\dots$ et $3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \to \dots\dots$, donc $u_n \to \dots\dots$

2. Compléter : $v_n = \frac{2n+1}{n+3} = \frac{n(\dots\dots)}{n(\dots\dots)} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{\dots\dots} \to \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dots\dots$

3. Déterminer la limite de $w_n = \frac{5 \times 2^n + 1}{2^n}$.

4. Déterminer la limite de $x_n = n - \sqrt{n}$. *Indication :* $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$.

Exercice 5 *Encadrer pour conclure* (T^{le}). Déterminer la limite de chaque suite ($n \geqslant 1$) à l'aide d'un théorème de comparaison.

1. $u_n = 2 + \frac{\sin(n)}{n}$

2. $v_n = n + \cos(n)$

3. $w_n = \dfrac{3 + (-1)^n}{n^2}$

Exercice 6 ***Problème en contexte : une suite récurrente*** (T^{le})**.** On reprend la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. On a montré à l'exercice 2 que $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ pour tout n.

1. Calculer u_1 et u_2 (arrondir au millième). Que conjecture-t-on sur le sens de variation ?
   $u_1 =$ ..... $u_2 =$ .....
   Conjecture : .....

2. Montrer que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ équivaut à $(u_n - 3)(u_n + 2) \leqslant 0$. En déduire que (u_n) est croissante.

3. Justifier que (u_n) converge.

   .....

   .....

4. Déterminer sa limite ℓ.

Exercice 7 ***Problème en contexte : atteindre un seuil*** (T^{le})**.** Un patient prend 200 mg d'un médicament ; chaque heure, l'organisme élimine 25 % de la quantité présente. On note m_n la quantité, en mg, après n heures : $m_n = 200 \times 0{,}75^n$.

1. Justifier que (m_n) est décroissante et donner sa limite.

   .....

   .....

2. Le médicament est considéré comme éliminé lorsque $m_n < 1$ mg. Compléter le tableau ci-dessous (arrondir au centième) et déterminer le premier rang n pour lequel $m_n < 1$.

n	16	17	18	19
m_n				

   Premier rang : .....

3. Décrire un algorithme (en français ou en Python) qui calcule ce rang à partir de $m_0 = 200$.

Exercice 8 *QCM* (T^{le})**.** Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. La limite de la suite $u_n = 0{,}3^n$ est :

   A. $+\infty$ **B.** 0,3 **C.** 0 **D.** elle n'existe pas

2. La limite de la suite $v_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2-3}$ est :

   A. 2 **B.** $+\infty$ **C.** 0 **D.** $-\dfrac{1}{3}$

3. Dans une démonstration par récurrence, l'hérédité consiste à :

   A. vérifier que P(0) est vraie
   B. supposer P(n) vraie pour tout entier n
   C. calculer u_{n+1} à partir de u_n
   D. montrer que, pour un n fixé, P(n) vraie entraîne P($n+1$) vraie

4. Une suite croissante et majorée par 5 :

   A. tend vers 5
   B. converge vers un réel $\ell \leqslant 5$
   C. tend vers $+\infty$
   D. n'a pas de limite

Exercice 9 ***Vrai ou faux ?.*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Si $u_n \to 0$, alors $u_n = 0$ à partir d'un certain rang.

B. Toute suite croissante tend vers $+\infty$.

C. Pour tout réel q tel que $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

D. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n et $v_n \to 0$, alors $u_n \to 0$.

E. L'hérédité seule suffit à prouver qu'une propriété est vraie pour tout n.

F. La suite $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

G. Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$, alors $u_n + v_n \to 0$.

H. Si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue et $u_n \to \ell$, alors $f(\ell) = \ell$.