Sommes de variables aléatoires

Une variable aléatoire décrit une expérience ; en pratique on en répète beaucoup : on lance deux dés et l'on additionne, on assure dix mille clients, on interroge mille personnes. Ce chapitre étudie ce qui se passe quand on **additionne** des variables aléatoires. L'espérance s'additionne toujours ; la variance s'additionne seulement pour des variables **indépendantes**. Appliqué à un **échantillon** de n répétitions, ce résultat explique pourquoi la moyenne observée se resserre autour de l'espérance quand n grandit : son écart-type est divisé par $\sqrt{n}$. Les **inégalités de Bienaymé-Tchebychev et de concentration** en donnent une version chiffrée, et la **loi des grands nombres** en est la conclusion : la fréquence d'un événement tend vers sa probabilité. C'est le fondement des sondages, des assurances et du contrôle de qualité.

Prérequis : Variables aléatoires, La loi binomiale. **Pour s'entraîner :** Exercices : sommes de variables aléatoires.

Propriété 1 (Somme de variables aléatoires et linéarité de l'espérance, T^le)

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers, et a, b deux réels.

Définitions : $X + Y$ est la variable aléatoire qui à chaque issue associe la somme des valeurs de X et de Y ; $aX + b$ associe a fois la valeur de X, plus b.

Linéarité de l'espérance : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX + b) = a\,E(X) + b$, **sans aucune hypothèse** d'indépendance.

Variance d'une transformation affine : $V(aX + b) = a^2\,V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X)$: ajouter une constante ne disperse pas, multiplier par a multiplie l'écart-type par $|a|$.

Exemple. On lance deux dés équilibrés ; X et Y sont les résultats et $S = X + Y$ la somme. $E(X) = E(Y) = 3{,}5$, donc $E(S) = 7$ sans avoir à écrire la loi de S (onze valeurs). Le gain $G = 2X - 3$ a pour espérance $2 \times 3{,}5 - 3 = 4$.

Exercice 1 *Espérance et variance d'une somme, étape par étape (T^{le})* On lance deux dés équilibrés ; X et Y désignent les résultats.

1. Compléter : $E(X) = \ldots$, donc $E(X + Y) = \ldots + \ldots = \ldots$
2. Montrer que $V(X) = \dfrac{35}{12}$ (on pourra calculer $E(X^2)$).
3. On pose $G = 2X - 3$. Calculer $E(G)$ et $V(G)$.
4. On pose $T = X + 10$. Comparer $V(T)$ et $V(X)$, puis $E(T)$ et $E(X)$. Interpréter.

Propriété 2 (Variance d'une somme de variables indépendantes, T^le)

Indépendance : X et Y sont indépendantes si, pour toutes valeurs x et y, $P(X = x \text{ et } Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$. C'est le cas quand elles décrivent deux expériences sans influence l'une sur l'autre (deux dés, deux tirages avec remise).

Théorème : si X et Y sont **indépendantes**, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, et donc $\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X) + V(Y)}$.

Attention : sans indépendance, la formule est fausse en général : $V(X + X) = V(2X) = 4V(X) \neq 2V(X)$. Les écarts-types, eux, ne s'additionnent jamais.

Exercice 2 *Additionner des variances (T^{le})*

1. Pour la somme S de deux dés, calculer V(S) et $\sigma(S)$ (arrondi au centième).
2. Soit $D = X - Y$ la différence des deux dés. Calculer E(D) et V(D) (on pourra écrire $D = X + (-Y)$).
3. X suit $\mathcal{B}(10\ ;\ 0{,}3)$ et Y suit $\mathcal{B}(5\ ;\ 0{,}3)$, indépendantes. Quelle est la loi de $X + Y$? Vérifier la cohérence avec les formules d'espérance et de variance.
4. Donner un exemple de deux variables X et Y de même variance non nulle telles que $V(X + Y) = 0$. Sont-elles indépendantes ?

Propriété 3 (Échantillon de taille n, somme et moyenne, T^le)

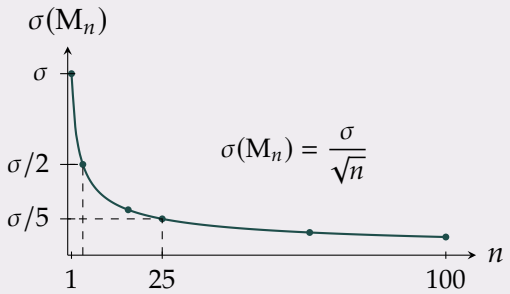
Un **échantillon de taille** n d'une variable X est une liste $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de variables **indépendantes** suivant toutes la loi de X (répétition de la même expérience). On note $\mu = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$.

Somme : $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ vérifie $E(S_n) = n\mu$, $V(S_n) = n\sigma^2$ et $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\,\sigma$.

Moyenne : $M_n = \dfrac{S_n}{n}$ vérifie $E(M_n) = \mu$, $V(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ et $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Lecture : la moyenne d'un échantillon vise juste (espérance μ) et se resserre autour de μ quand n augmente, mais lentement : pour diviser $\sigma(M_n)$ par 10, il faut multiplier n par 100.

Cas de Bernoulli : si X suit $\mathcal{B}(p)$, alors S_n suit $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$: on retrouve $E = np$ et $V = np(1-p)$. La moyenne M_n est alors la **fréquence** de succès.



Exercice 3 *Somme et moyenne d'un échantillon, étape par étape (T^le)* À un jeu, le gain X d'une partie (en euros) a pour espérance 0,5 et pour écart-type 2. Un joueur fait $n = 100$ parties indépendantes ; S_{100} est son gain total et M_{100} son gain moyen par partie.

1. Compléter : $E(S_{100}) = 100 \times \ldots = \ldots$; $V(S_{100}) = 100 \times \ldots = \ldots$; $\sigma(S_{100}) = \ldots$
2. Calculer $E(M_{100})$ et $\sigma(M_{100})$.
3. Combien de parties faudrait-il pour que $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}05$?
4. On note X_i la variable qui vaut 1 si la partie i est gagnée (probabilité p) et 0 sinon. Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$? Retrouver son espérance et sa variance à partir de celles de X_1.

Propriété 4 (Inégalités de concentration et loi des grands nombres, T^le)

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour toute variable X et tout réel $\delta > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Elle majore la probabilité de s'écarter de l'espérance d'au moins δ, quelle que soit la loi.

Inégalité de concentration : pour la moyenne M_n d'un échantillon de X,

$$P\left(|M_n - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(X)}{n\,\delta^2}.$$

Loi (faible) des grands nombres : pour tout $\delta > 0$, $P\left(|M_n - \mu| \geqslant \delta\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$: la moyenne d'un grand échantillon est, avec une probabilité proche de 1, aussi proche de μ que l'on veut. En particulier la fréquence d'un événement tend vers sa probabilité.

Lecture : ces inégalités donnent des **majorants**, souvent grossiers ; leur force est de ne rien supposer sur la loi de X.

Méthode : utiliser une inégalité de concentration

1. Identifier $\mu = E(X)$, $V(X)$ et l'écart δ toléré (l'événement doit s'écrire $|M_n - \mu| \geqslant \delta$ ou $|X - E(X)| \geqslant \delta$).
2. Appliquer l'inégalité pour majorer la probabilité de l'écart, ou passer au contraire pour minorer $P(|M_n - \mu| < \delta)$.
3. Pour dimensionner un échantillon, résoudre $\dfrac{V(X)}{n\,\delta^2} \leqslant$ (seuil voulu) en n.

Exemple. X a pour espérance 10 et pour variance 4. Alors $P(|X - 10| \geqslant 4) \leqslant \dfrac{4}{16} = 0{,}25$: la probabilité que X sorte de $]6\ ;\ 14[$ est au plus 0,25, donc $P(6 < X < 14) \geqslant 0{,}75$.

Exercice 4 *Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev* (T^{le}) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}5)$.

1. Calculer E(X) et V(X).
2. Majorer $P(|X - 10| \geqslant 5)$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. À l'aide de la calculatrice, on trouve $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}0207$. En déduire la valeur exacte approchée de $P(|X - 10| \geqslant 5)$ et commenter la qualité du majorant.
4. Que donne l'inégalité pour $\delta = 2$? Que peut-on en conclure ?

Exercice 5 *Inégalité de concentration et loi des grands nombres* (T^{le}) On lance n fois une pièce équilibrée et l'on note F_n la fréquence de « pile » obtenue.

1. Justifier que F_n est la moyenne d'un échantillon d'une variable X dont on précisera l'espérance et la variance.
2. Montrer que $P(|F_n - 0{,}5| \geqslant 0{,}1) \leqslant \dfrac{25}{n}$. Que vaut ce majorant pour $n = 100$? pour $n = 1\,000$?
3. Quelle taille d'échantillon garantit $P(|F_n - 0{,}5| \geqslant 0{,}1) \leqslant 0{,}01$?
4. On lance maintenant un dé et G_n est la fréquence du « 6 ». Quelle taille garantit $P\left(\left|G_n - \dfrac{1}{6}\right| \geqslant 0{,}05\right) \leqslant 0{,}01$?
5. Énoncer ce que dit la loi des grands nombres dans ces deux situations.

Exercice 6 *Problème en contexte : contrôle de qualité* (T^{le}) Une machine produit des pièces dont 2 % sont défectueuses, indépendamment les unes des autres. On prélève un lot de 500 pièces ; S est le nombre de pièces défectueuses et $F = \dfrac{S}{500}$ la proportion observée.

1. Quelle est la loi de S ? Calculer E(S), V(S) et $\sigma(S)$ (arrondi au centième).
2. Majorer la probabilité que le lot contienne au moins 20 pièces défectueuses.
3. Majorer $P(|F - 0{,}02| \geqslant 0{,}01)$.
4. Quelle taille de lot faudrait-il pour que cette probabilité soit majorée par 0,05 ?

Exercice 7 *Problème en contexte : pourquoi une assurance mutualise (T^{le})* Pour un assuré, le coût annuel X des sinistres (en euros) a pour espérance 200 et pour écart-type 1 000. L'assureur fait payer une prime de 230 € à chacun de ses n assurés, supposés indépendants. On note S_n le coût total et M_n le coût moyen par assuré.

1. Exprimer $E(S_n)$, $\sigma(S_n)$ et $\sigma(M_n)$ en fonction de n. Calculer $\sigma(M_n)$ pour $n = 100$, 10 000 et 1 000 000.
2. L'assureur est en perte si $S_n > 230n$. Montrer que cet événement entraîne $|S_n - 200n| \geqslant 30n$, puis majorer sa probabilité en fonction de n.
3. Calculer ce majorant pour $n = 10\,000$ et $n = 100\,000$. Conclure sur l'intérêt d'avoir beaucoup d'assurés.

⚠ Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Additionner les variances sans indépendance	« $V(X + X) = 2V(X)$ »	$V(2X) = 4V(X)$; la formule exige l'indépendance
Additionner les écarts-types	« $\sigma(X+Y) = \sigma(X)+\sigma(Y)$ »	ce sont les variances qui s'ajoutent : $\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X) + V(Y)}$
Oublier le carré dans $V(aX)$	« $V(3X) = 3V(X)$ »	$V(3X) = 9V(X)$ et $\sigma(3X) = 3\sigma(X)$
Confondre somme et moyenne	« $\sigma(M_n) = \sqrt{n}\,\sigma$ »	c'est $\sigma(S_n)$; pour la moyenne, $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Lire une inégalité comme une égalité	« $P(\lvert X - 10\rvert \geqslant 4) = 0{,}25$ »	l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne un **majorant**, souvent très large

Exercice 8 *QCM (T^{le})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. Si $E(X) = 2$ et $E(Y) = 5$, alors $E(X + Y)$ vaut :

   A. 10 **B.** 3,5

   C. 7 seulement si X et Y sont indépendantes **D.** 7 dans tous les cas

2. Si X et Y sont indépendantes avec $V(X) = 3$ et $V(Y) = 1$, alors $V(X - Y)$ vaut :

   A. 2 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 16

3. Pour la moyenne M_n d'un échantillon de taille n d'une variable d'écart-type σ, on a $\sigma(M_n) =$

A. $\dfrac{\sigma}{n}$ **B.** $\sqrt{n}\,\sigma$ **C.** $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ **D.** σ

4. Si $E(X) = 5$ et $V(X) = 2$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $P(|X - 5| \geqslant 2) \leqslant$

A. 0,5 **B.** 1 **C.** 0,25 **D.** 2

Exercice 9 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ même si X et Y ne sont pas indépendantes.

B. $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ pour toutes variables aléatoires X et Y.

C. $V(2X) = 2V(X)$.

D. L'écart-type de la moyenne M_n d'un échantillon tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

E. D'après la loi des grands nombres, M_n est égale à $E(X)$ dès que n est assez grand.

F. Une variable de loi $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

G. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne la valeur exacte de $P(|X - E(X)| \geqslant \delta)$.

H. Si X et Y sont indépendantes, alors $\sigma(X + Y) \leqslant \sigma(X) + \sigma(Y)$.

Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche ***Que faire quand je bloque ?***
Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche ***Mémorisation et sciences cognitives****.*
Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton ***Carnet d'erreurs****.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$, donc $\mathrm{E}(X+Y) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$.
2. $\mathrm{E}(X^2) = \dfrac{1+4+9+16+25+36}{6} = \dfrac{91}{6}$, donc $\mathrm{V}(X) = \dfrac{91}{6} - 3{,}5^2 = \dfrac{91}{6} - \dfrac{49}{4} = \dfrac{182-147}{12} = \dfrac{35}{12} \approx 2{,}92$.
3. $\mathrm{E}(G) = 2 \times 3{,}5 - 3 = 4$ et $\mathrm{V}(G) = 2^2 \times \dfrac{35}{12} = \dfrac{35}{3} \approx 11{,}67$.
4. $\mathrm{V}(T) = \mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(X) + 10 = 13{,}5$: décaler toutes les valeurs de 10 déplace la moyenne sans changer la dispersion.

Corrigé de l'exercice 2.

1. Les dés sont indépendants : $\mathrm{V}(S) = \dfrac{35}{12} + \dfrac{35}{12} = \dfrac{35}{6} \approx 5{,}83$ et $\sigma(S) \approx 2{,}42$.
2. $\mathrm{E}(D) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y) = 0$. $-Y$ a pour variance $(-1)^2\mathrm{V}(Y) = \mathrm{V}(Y)$ et reste indépendante de X : $\mathrm{V}(D) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) = \dfrac{35}{6}$. La différence est aussi dispersée que la somme.
3. X compte les succès de 10 épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre 0,3, Y ceux de 5 autres épreuves indépendantes des premières : X + Y compte les succès de 15 épreuves indépendantes, donc suit $\mathcal{B}(15\ ;\ 0{,}3)$. Vérification : $\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = 3 + 1{,}5 = 4{,}5 = 15 \times 0{,}3$ et $\mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) = 2{,}1 + 1{,}05 = 3{,}15 = 15 \times 0{,}3 \times 0{,}7$. ✓
4. $Y = -X$: $X + Y = 0$, de variance nulle, alors que $\mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) = 2\mathrm{V}(X) \neq 0$. Elles ne sont pas indépendantes (connaître X détermine Y), ce qui explique l'échec de la formule.

Corrigé de l'exercice 3.

1. $\mathrm{E}(S_{100}) = 100 \times 0{,}5 = 50$; $\mathrm{V}(S_{100}) = 100 \times 2^2 = 400$; $\sigma(S_{100}) = 20$.
2. $\mathrm{E}(M_{100}) = 0{,}5$ et $\sigma(M_{100}) = \dfrac{2}{\sqrt{100}} = 0{,}2$.
3. $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}05 \iff \sqrt{n} \geqslant 40 \iff n \geqslant 1\,600$ parties.
4. Les X_i suivent $\mathcal{B}(p)$, indépendantes : la somme suit $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$. Comme $\mathrm{E}(X_1) = p$ et $\mathrm{V}(X_1) = p(1-p)$, on obtient $\mathrm{E} = np$ et $\mathrm{V} = np(1-p)$: les formules de la loi binomiale sont un cas particulier des formules d'échantillon.

Corrigé de l'exercice 4.

1. $\mathrm{E}(X) = 20 \times 0{,}5 = 10$ et $\mathrm{V}(X) = 20 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 5$.
2. $\mathrm{P}(|X - 10| \geqslant 5) \leqslant \dfrac{5}{25} = 0{,}2$.
3. $|X - 10| \geqslant 5$ signifie $X \leqslant 5$ ou $X \geqslant 15$; par symétrie de la loi $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}5)$, ces deux événements ont la même probabilité : $\mathrm{P} \approx 2 \times 0{,}0207 \approx 0{,}041$. Le majorant 0,2 est cinq

fois trop grand : l'inégalité est vraie mais grossière, car elle ne tient pas compte de la forme de la loi.

4. $\dfrac{5}{4} = 1{,}25 > 1$: l'inégalité ne dit rien d'utile (une probabilité est toujours inférieure à 1). Elle n'a d'intérêt que pour $\delta > \sigma(X)$.

Corrigé de l'exercice 5.

1. $F_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ où X_i vaut 1 si le i-ième lancer donne pile, 0 sinon : les X_i sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(0{,}5)$, avec $E(X) = 0{,}5$ et $V(X) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$.
2. Inégalité de concentration avec $\delta = 0{,}1$: $P(|F_n - 0{,}5| \geqslant 0{,}1) \leqslant \dfrac{0{,}25}{n \times 0{,}01} = \dfrac{25}{n}$. Pour $n = 100$: 0,25 ; pour $n = 1\,000$: 0,025.
3. $\dfrac{25}{n} \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant 2\,500$ lancers.
4. $E(X) = \dfrac{1}{6}$, $V(X) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}$. Il faut $\dfrac{5/36}{n \times 0{,}0025} \leqslant 0{,}01$, soit $n \geqslant \dfrac{5}{36 \times 0{,}0025 \times 0{,}01} \approx 5\,556$ lancers.
5. Quand n devient grand, la probabilité que la fréquence de pile s'écarte de 0,5 de plus de 0,1 (ou de tout écart fixé) tend vers 0 ; de même la fréquence du 6 se rapproche de $\dfrac{1}{6}$. La fréquence observée tend vers la probabilité : c'est ce qui justifie d'estimer une probabilité inconnue par une fréquence sur un grand échantillon.

Corrigé de l'exercice 6.

1. S suit $\mathcal{B}(500\ ;\ 0{,}02)$: $E(S) = 10$, $V(S) = 500 \times 0{,}02 \times 0{,}98 = 9{,}8$, $\sigma(S) \approx 3{,}13$.
2. $S \geqslant 20$ entraîne $|S - 10| \geqslant 10$, donc $P(S \geqslant 20) \leqslant P(|S - 10| \geqslant 10) \leqslant \dfrac{9{,}8}{100} = 0{,}098$.
3. F est la moyenne d'un échantillon de taille 500 d'une variable de Bernoulli de variance $0{,}02 \times 0{,}98 = 0{,}0196$: $P(|F - 0{,}02| \geqslant 0{,}01) \leqslant \dfrac{0{,}0196}{500 \times 0{,}0001} = 0{,}392$.
4. $\dfrac{0{,}0196}{n \times 0{,}0001} \leqslant 0{,}05 \iff n \geqslant \dfrac{0{,}0196}{0{,}05 \times 0{,}0001} = 3\,920$ pièces.

Corrigé de l'exercice 7.

1. $E(S_n) = 200n$, $\sigma(S_n) = 1\,000\sqrt{n}$ et $\sigma(M_n) = \dfrac{1\,000}{\sqrt{n}}$: 100 € pour $n = 100$, 10 € pour $n = 10\,000$, 1 € pour $n = 1\,000\,000$. Le coût moyen par assuré devient presque certain.
2. $S_n > 230n \iff S_n - 200n > 30n$, ce qui entraîne $|S_n - 200n| \geqslant 30n$. Par Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 30n$: $P(\text{perte}) \leqslant \dfrac{V(S_n)}{(30n)^2} = \dfrac{10^6\, n}{900\, n^2} = \dfrac{10^6}{900\, n} \approx \dfrac{1\,111}{n}$.
3. $n = 10\,000$: au plus 0,11 ; $n = 100\,000$: au plus 0,011. Plus le nombre d'assurés est grand, plus le coût moyen se concentre autour de 200 € et plus la prime de 230 € couvre les sinistres avec une probabilité proche de 1 : c'est la mutualisation, application directe de la loi des grands nombres.

Corrigé de l'exercice 8.

1. **Réponse D.** La linéarité de l'espérance ne demande aucune hypothèse.
   - A : $10 = 2 \times 5$ serait un produit, sans rapport.
   - B : 3,5 est la moyenne des deux espérances, pas leur somme.
   - C : l'indépendance n'est nécessaire que pour la variance.
2. **Réponse B.** $X - Y = X + (-Y)$ avec $V(-Y) = V(Y)$: $V(X - Y) = 3 + 1 = 4$.
   - A : on ne soustrait jamais des variances ; une variance est toujours positive.
   - C : la variance de Y a été oubliée.
   - D : $16 = 4^2$ confond variance et carré.
3. **Réponse C.** $V(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$, donc $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
   - A : c'est la variance qui est divisée par n, pas l'écart-type.
   - B : c'est l'écart-type de la somme S_n.
   - D : la moyenne est moins dispersée que X ; c'est tout l'intérêt d'un échantillon.
4. **Réponse A.** $\dfrac{V(X)}{\delta^2} = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$.
   - B : le majorant 1 est toujours vrai mais n'est pas celui donné par l'inégalité.
   - C : $0{,}25 = \dfrac{1}{\delta^2}$ oublie la variance.
   - D : une probabilité ne dépasse pas 1 ; $2 = \dfrac{V(X)}{\delta}$ oublie le carré.

Corrigé de l'exercice 9.

A. Vrai. C'est la linéarité de l'espérance, valable sans hypothèse.

B. Faux. Contre-exemple $Y = X$: $V(2X) = 4V(X) \neq 2V(X)$. La formule exige l'indépendance.

C. Faux. $V(aX) = a^2V(X)$, donc $V(2X) = 4V(X)$.

D. Vrai. $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \to 0$.

E. Faux. La loi des grands nombres affirme que la **probabilité** d'un écart donné tend vers 0, pas que l'écart devient nul : M_n reste aléatoire.

F. Vrai. Chaque épreuve est codée par une Bernoulli, et le nombre de succès en est la somme.

G. Faux. Elle fournit un majorant, souvent très supérieur à la vraie valeur (voir la loi $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}5)$: 0,2 contre 0,04).

H. Vrai. $\sigma(X+Y) = \sqrt{V(X)+V(Y)} \leqslant \sqrt{V(X)} + \sqrt{V(Y)}$ car $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour $a, b \geqslant 0$ (élever au carré : $a + b \leqslant a + b + 2\sqrt{ab}$).