Sommes de variables aléatoires — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur les sommes de variables aléatoires. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver la linéarité de l'espérance, la formule de la variance d'une somme de variables indépendantes, les formules de l'échantillon (S_n et M_n), l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et l'inégalité de concentration. Avant d'additionner des variances, demande-toi toujours si les variables sont indépendantes.

Exercice 1 ***Espérance et variance d'une somme, étape par étape*** **(T^{le}).** On lance deux dés équilibrés ; X et Y désignent les résultats.

1. Compléter : E(X) = ... , donc E(X + Y) = ... + ... = ...
2. Montrer que $V(X) = \dfrac{35}{12}$ (on pourra calculer $E(X^2)$).

3. On pose G = 2X − 3. Calculer E(G) et V(G).

4. On pose T = X + 10. Comparer V(T) et V(X), puis E(T) et E(X). Interpréter.

. . . . . .

. . . . . .

Exercice 2 ***Additionner des variances*** **(T^{le}).**

1. Pour la somme S de deux dés, calculer V(S) et σ(S) (arrondi au centième).

2. Soit D = X − Y la différence des deux dés. Calculer E(D) et V(D) (on pourra écrire D = X + (−Y)).

3. X suit $\mathcal{B}(10\ ;\ 0{,}3)$ et Y suit $\mathcal{B}(5\ ;\ 0{,}3)$, indépendantes. Quelle est la loi de X + Y ? Vérifier la cohérence avec les formules d'espérance et de variance.

4. Donner un exemple de deux variables X et Y de même variance non nulle telles que V(X + Y) = 0. Sont-elles indépendantes ?

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Exercice 3 ***Somme et moyenne d'un échantillon, étape par étape*** **(*T^le*).** À un jeu, le gain X d'une partie (en euros) a pour espérance 0,5 et pour écart-type 2. Un joueur fait $n = 100$ parties indépendantes ; S_{100} est son gain total et M_{100} son gain moyen par partie.

1. Compléter : $E(S_{100}) = 100\times$ ..... = ... ; $V(S_{100}) = 100\times$ ..... = ... ; $\sigma(S_{100})$ = ...

2. Calculer $E(M_{100})$ et $\sigma(M_{100})$.

. . . . . .

. . . . . .

3. Combien de parties faudrait-il pour que $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}05$?

4. On note X_i la variable qui vaut 1 si la partie i est gagnée (probabilité p) et 0 sinon. Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$? Retrouver son espérance et sa variance à partir de celles de X_1.

Exercice 4 ***Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev*** **(*T^le*).** Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}5)$.

1. Calculer E(X) et V(X).

   . . . . . .

2. Majorer $P(|X - 10| \geqslant 5)$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

3. À l'aide de la calculatrice, on trouve $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}0207$. En déduire une valeur approchée de $P(|X - 10| \geqslant 5)$ et commenter la qualité du majorant.

4. Que donne l'inégalité pour $\delta = 2$? Que peut-on en conclure ?

Exercice 5 ***Inégalité de concentration et loi des grands nombres*** **(*T^le*).** On lance n fois une pièce équilibrée et l'on note F_n la fréquence de « pile » obtenue.

1. Justifier que F_n est la moyenne d'un échantillon d'une variable X dont on précisera l'espérance et la variance.

2. Montrer que $P(|F_n - 0{,}5| \geqslant 0{,}1) \leqslant \dfrac{25}{n}$. Que vaut ce majorant pour $n = 100$? pour $n = 1\,000$?

3. Quelle taille d'échantillon garantit $P(|F_n - 0{,}5| \geqslant 0{,}1) \leqslant 0{,}01$?

4. On lance maintenant un dé et G_n est la fréquence du « 6 ». Quelle taille garantit l'inégalité suivante ?

$$P\left(\left|G_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0{,}05\right) \leqslant 0{,}01$$

5. Énoncer ce que dit la loi des grands nombres dans ces deux situations.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Exercice 6 ***Problème en contexte : contrôle de qualité*** (T^{le})**.** Une machine produit des pièces dont 2 % sont défectueuses, indépendamment les unes des autres. On prélève un lot de 500 pièces ; S est le nombre de pièces défectueuses et $F = \frac{S}{500}$ la proportion observée.

1. Quelle est la loi de S ? Calculer E(S), V(S) et σ(S) (arrondi au centième).

2. Majorer la probabilité que le lot contienne au moins 20 pièces défectueuses.

3. Majorer $P(|F - 0{,}02| \geqslant 0{,}01)$.

4. Quelle taille de lot faudrait-il pour que cette probabilité soit majorée par 0,05 ?

Exercice 7 ***Problème en contexte : pourquoi une assurance mutualise*** (T^{le})**.** Pour un assuré, le coût annuel X des sinistres (en euros) a pour espérance 200 et pour écart-type 1 000. L'assureur fait payer une prime de 230 € à chacun de ses n assurés, supposés indépendants. On note S_n le coût total et M_n le coût moyen par assuré.

1. Exprimer $E(S_n)$, $\sigma(S_n)$ et $\sigma(M_n)$ en fonction de n. Calculer $\sigma(M_n)$ pour $n = 100$, 10 000 et 1 000 000.

2. L'assureur est en perte si $S_n > 230n$. Montrer que cet événement entraîne $|S_n - 200n| \geqslant 30n$, puis majorer sa probabilité en fonction de n.

3. Calculer ce majorant pour $n = 10\,000$ et $n = 100\,000$. Conclure sur l'intérêt d'avoir beaucoup d'assurés.

Exercice 8 ***QCM*** (T^{le})**.** Pour chaque question, entourer la seule réponse correcte, puis justifier en une phrase.

1. Si $E(X) = 2$ et $E(Y) = 5$, alors $E(X + Y)$ vaut :

A. 10 **B.** 3,5

C. 7 seulement si X et Y sont indépendantes **D.** 7 dans tous les cas

. . . . . .

2. Si X et Y sont indépendantes avec V(X) = 3 et V(Y) = 1, alors V(X − Y) vaut :

A. 2 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 16

. . . . . .

3. Pour la moyenne M_n d'un échantillon de taille n d'une variable d'écart-type σ, on a $\sigma(M_n) =$

A. $\frac{\sigma}{n}$ **B.** $\sqrt{n}\,\sigma$ **C.** $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ **D.** σ

. . . . . .

4. Si E(X) = 5 et V(X) = 2, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $P(|X - 5| \geqslant 2) \leqslant$

A. 0,5 **B.** 1 **C.** 0,25 **D.** 2

. . . . . .

Exercice 9 ***Vrai ou faux ?.*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. E(X + Y) = E(X) + E(Y) même si X et Y ne sont pas indépendantes.

B. V(X + Y) = V(X) + V(Y) pour toutes variables aléatoires X et Y.

C. V(2X) = 2V(X).

D. L'écart-type de la moyenne M_n d'un échantillon tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

E. D'après la loi des grands nombres, M_n est égale à $E(X)$ dès que n est assez grand.

F. Une variable de loi $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

G. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne la valeur exacte de $P(|X - E(X)| \geqslant \delta)$.

H. Si X et Y sont indépendantes, alors $\sigma(X + Y) \leqslant \sigma(X) + \sigma(Y)$.

