Le second degré

Un trinôme du second degré est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On le rencontre dès qu'une grandeur dépend du carré d'une autre : aire d'un terrain, trajectoire d'un ballon, optimisation d'un bénéfice. Tout le chapitre repose sur un seul outil, le **discriminant**, qui répond à trois questions : l'équation a-t-elle des solutions, comment factoriser le trinôme, et quel est son signe. La vraie difficulté n'est pas de calculer le discriminant, mais de reconnaître laquelle de ces trois questions est posée.

Prérequis : Calcul littéral, Équations. **Pour s'entraîner :** Exercices : second degré.

Définitions 1 (Vocabulaire, 1re)

Trinôme du second degré : expression de la forme $ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$. Le coefficient a est le coefficient dominant.
Racine : un réel x_0 est une racine du trinôme lorsque $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$. Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, c'est chercher ses racines.
Forme développée : l'écriture $ax^2 + bx + c$, celle que l'on lit directement.
Forme factorisée : l'écriture $a(x - x_1)(x - x_2)$ lorsque le trinôme possède deux racines x_1 et x_2. Elle est très utile pour résoudre et pour étudier le signe.

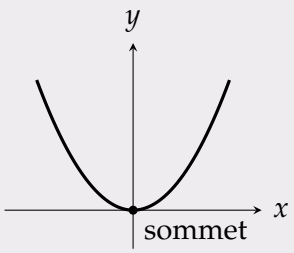
Exemple. Dans $3x^2 - 5x + 2$, on lit $a = 3$, $b = -5$ et $c = 2$. Dans $-x^2 + 4$, on a $a = -1$, $b = 0$ et $c = 4$. Dans $2x^2 - x$, on a $a = 2$, $b = -1$ et $c = 0$: il faut penser à repérer le signe et les coefficients nuls.

Propriété 1 (La parabole, 1re)

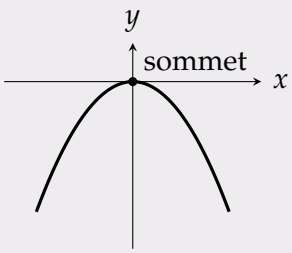
La courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est une **parabole**. Son orientation ne dépend que du signe de a :

- si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut et admet un minimum ;
- si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas et admet un maximum.

Le point le plus bas (ou le plus haut) s'appelle le **sommet** ; la parabole est symétrique par rapport à la droite verticale passant par ce sommet.



$a > 0$ (minimum)



$a < 0$ (maximum)

Exercice 1 *Identifier les coefficients et l'orientation (1^{re})*

1. Pour chaque trinôme, donner les valeurs de a, b et c :
   a) $A = 2x^2 - 3x + 1$
   b) $B = -x^2 + 5x$
   c) $C = 4 - x^2$
   d) $D = (x - 1)(x + 3)$
2. Pour chacun des trinômes A, B, C et D, dire si la parabole associée est tournée vers le haut ou vers le bas, et si la fonction admet un minimum ou un maximum.
3. L'expression $E = 3x + 2$ est-elle un trinôme du second degré ? Justifier.

Définition 1 (Le discriminant, 1^{re})

Pour le trinôme $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), on appelle **discriminant** le nombre

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Le signe de Δ détermine le nombre de racines :

Si $\Delta > 0$: le trinôme a deux racines distinctes $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
Si $\Delta = 0$: le trinôme a une seule racine (dite double) $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
Si $\Delta < 0$: le trinôme n'a aucune racine réelle.

Exemples **A.** $x^2 - 5x + 6$: $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$. Deux racines.
B. $x^2 - 6x + 9$: $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0$. Une racine double.
C. $x^2 + x + 1$: $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$. Aucune racine réelle.

Méthode : résoudre $ax^2 + bx + c = 0$

1. Identifier a, b, c (attention aux signes).
2. Calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.
3. Conclure selon le signe de Δ, et si $\Delta \geqslant 0$, calculer la (ou les) racine(s).

Exemple. Résoudre $2x^2 - 5x + 3 = 0$.
On identifie $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$, puis on calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3$$
$$\Delta = 25 - 24 = 1.$$

Comme $\Delta = 1 > 0$, il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{4} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}.$$

L'ensemble des solutions est $S = \left\{1 \ ; \ \frac{3}{2}\right\}$.

Méthode : factoriser un trinôme

Si $\Delta > 0$ et que x_1, x_2 sont les racines, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Si $\Delta = 0$ et que x_0 est la racine double, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$. Si $\Delta < 0$, le trinôme ne se factorise pas dans les réels.

Exemple. Le trinôme $2x^2 - 5x + 3$ a pour racines 1 et $\frac{3}{2}$ (calculées ci-dessus). Donc

$$2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)\left(x - \tfrac{3}{2}\right) = (x-1)(2x-3).$$

On a fait entrer le facteur 2 dans la seconde parenthèse pour obtenir une écriture sans fraction.

Exercice 2 *Calculer un discriminant, étape par étape (1re)* On veut résoudre l'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$. Compléter chaque étape.

1. Les coefficients sont $a = \ldots$, $b = \ldots$ et $c = \ldots$
2. $\Delta = b^2 - 4ac = (\ldots)^2 - 4 \times \ldots \times \ldots = \ldots + \ldots = \ldots$
3. Comme $\Delta \ \ldots \ 0$, l'équation admet ... solution(s).
4. $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\ldots - \ldots}{\ldots} = \ldots$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\ldots + \ldots}{\ldots} = \ldots$
5. Vérification : remplacer x par x_1 dans $x^2 - 3x - 4$: $(\ldots)^2 - 3 \times (\ldots) - 4 = \ldots$
6. L'ensemble des solutions est $S = \{\ldots \ ; \ \ldots\}$.

Exercice 3 *Résoudre des équations du second degré (1^{re})* Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en détaillant le calcul du discriminant lorsqu'il est nécessaire.

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

c) $x^2 + 2x + 5 = 0$

d) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

e) $x^2 - 5x = 0$

f) $2x^2 - 18 = 0$

Exercice 4 *Factoriser un trinôme (1^{re})*

1. Le trinôme $2x^2 - 5x + 3$ a pour racines 1 et $\frac{3}{2}$. Compléter : $2x^2 - 5x + 3 = \ldots (x - \ldots)(x - \ldots) = (x - 1)(\ldots x - \ldots)$.
2. Factoriser lorsque c'est possible, en utilisant les racines trouvées à l'exercice précédent :

   a) $A = x^2 - 7x + 10$

   b) $B = 3x^2 + 5x - 2$

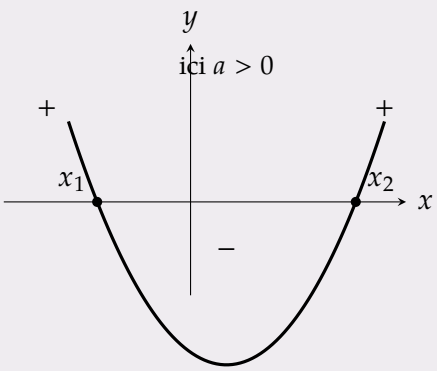
   c) $C = x^2 - 4x + 4$

   d) $D = x^2 + 2x + 5$

3. Vérifier la factorisation de B en développant.

Propriété 2 (Signe du trinôme, 1^{re})

Lorsque $\Delta > 0$, le trinôme est **du signe de a à l'extérieur des racines**, et du signe contraire entre les racines. C'est une lecture directe de la parabole : elle est du côté positif des y quand elle est au-dessus de l'axe des abscisses. Lorsque $\Delta = 0$, le trinôme est du signe de a et s'annule uniquement en x_0 ; lorsque $\Delta < 0$, il ne s'annule jamais et reste du signe de a pour tout réel x.



Exemple. Signe de $2x^2 - 5x + 3$: les racines sont 1 et $\frac{3}{2}$, et $a = 2 > 0$. Le trinôme est donc du signe de a (positif) à l'extérieur des racines, et négatif entre elles :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x^2 - 5x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 5 *Étudier un signe et résoudre une inéquation (1^{re})*

1. On considère le trinôme $P(x) = -x^2 + 4x - 3$.
   a) Calculer le discriminant et les racines de P.
   b) En déduire la forme factorisée de $P(x)$.
   c) Dresser le tableau de signes de $P(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - x - 6 \leqslant 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^2 + 3x + 5 > 0$.

Exercice 6 *Problème en contexte (1^{re})* Un fabricant estime que son bénéfice, en milliers d'euros, pour x centaines d'objets vendus, est $B(x) = -2x^2 + 12x - 10$, avec $0 \leqslant x \leqslant 6$.

1. Pour quelles quantités le bénéfice est-il nul ?
2. Déterminer les quantités pour lesquelles le bénéfice est positif.
3. Sans calcul supplémentaire, expliquer pourquoi le bénéfice admet un maximum.
4. En utilisant la symétrie de la parabole, déterminer la quantité qui rend le bénéfice maximal, puis calculer ce bénéfice maximal.

⚠ Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Oublier le signe dans b^2	$b = -5 \Rightarrow b^2 = -25$	$b^2 = (-5)^2 = 25$
Mal placer les signes dans Δ	$\Delta = b^2 + 4ac$	$\Delta = b^2 - 4ac$
Diviser par a au lieu de $2a$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
Conclure trop vite quand $\Delta < 0$	« pas de solution donc erreur »	$\Delta < 0$: aucune racine réelle, c'est une réponse valable

Exercice 7 *QCM (1^{re})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. Le discriminant du trinôme $2x^2 - 3x + 1$ vaut :

   A. 17 **B.** 1 **C.** -1 **D.** -17

2. Le trinôme $3x^2 - 6x + 3$ admet :

   A. deux racines, 1 et -1 **B.** aucune racine
   C. une racine double égale à 1 **D.** une racine double égale à -1

3. Le trinôme $x^2 - 5x + 6$ est strictement négatif :

   A. sur $]2\ ;\ 3[$ **B.** sur $]-\infty\ ;\ 2[\cup]3\ ;\ +\infty[$
   C. pour aucune valeur de x **D.** sur $]-\infty\ ;\ 6[$

4. Le trinôme $2x^2 - 2x - 12$ a pour racines -2 et 3. Sa forme factorisée est :

   A. $(x + 2)(x - 3)$ **B.** $2(x - 2)(x + 3)$
   C. $(2x - 4)(2x + 6)$ **D.** $2(x + 2)(x - 3)$

Exercice 8 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a aucune solution réelle.

B. Un trinôme du second degré peut avoir trois racines.

C. Si $a > 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est positif pour tout réel x.

D. $-x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2$.

E. L'équation $x^2 + 1 = 0$ admet deux solutions réelles.

F. Le nombre 3 est une racine du trinôme $x^2 - 2x - 3$.

G. Si $\Delta = 0$, la parabole touche l'axe des abscisses en un seul point.

H. Les solutions de $2x^2 - 8 = 0$ sont 4 et -4.

*Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche **Que faire quand je bloque ?***
*Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche **Mémorisation et sciences cognitives**.*
*Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton **Carnet d'erreurs**.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1.

   a) $A = 2x^2 - 3x + 1$: $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$.

   b) $B = -x^2 + 5x$: $a = -1$, $b = 5$, $c = 0$ (il n'y a pas de terme constant).

   c) $C = 4 - x^2 = -x^2 + 0x + 4$: $a = -1$, $b = 0$, $c = 4$. On réordonne d'abord les termes selon les puissances décroissantes de x.

   d) On développe : $D = (x-1)(x+3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$, donc $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.

2. Seul le signe de a compte :

   - A : $a = 2 > 0$, parabole tournée vers le haut, la fonction admet un minimum ;
   - B : $a = -1 < 0$, parabole tournée vers le bas, la fonction admet un maximum ;
   - C : $a = -1 < 0$, parabole tournée vers le bas, la fonction admet un maximum ;
   - D : $a = 1 > 0$, parabole tournée vers le haut, la fonction admet un minimum.

3. Non : dans $3x + 2$, le coefficient de x^2 est nul ($a = 0$). C'est une expression du premier degré ; sa représentation graphique est une droite et non une parabole.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $a = 1$, $b = -3$ et $c = -4$.
2. $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$.
3. Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes.
4. $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-5}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+5}{2} = 4$. Attention : $b = -3$, donc $-b = 3$.
5. Avec $x_1 = -1$: $(-1)^2 - 3 \times (-1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$. ✓ Avec $x_2 = 4$: $4^2 - 3 \times 4 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$. ✓
6. $S = \{-1 \ ; \ 4\}$.

Corrigé de l'exercice 3.

1. $a = 1$, $b = -7$, $c = 10$. $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9 > 0$. Deux racines : $x_1 = \dfrac{7-3}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{7+3}{2} = 5$. $S = \{2 \ ; \ 5\}$.
2. $a = 1$, $b = -4$, $c = 4$. $\Delta = 16 - 16 = 0$. Racine double : $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$. $S = \{2\}$.
3. $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$. $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$. Aucune solution réelle : $S = \varnothing$.

4. $a = 3$, $b = 5$, $c = -2$. $\Delta = 25 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 > 0$. Deux racines : $x_1 = \dfrac{-5-7}{6} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-5+7}{6} = \dfrac{1}{3}$. $S = \left\{-2 \ ; \ \dfrac{1}{3}\right\}$.

5. Ici $c = 0$: le discriminant n'est pas nécessaire, on factorise par x. $x^2 - 5x = x(x-5) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 5$. $S = \{0 \ ; \ 5\}$. (Le discriminant donne le même résultat : $\Delta = 25$, racines 0 et 5.)

6. Ici $b = 0$: on isole x^2. $2x^2 - 18 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = -3$ ou $x = 3$. $S = \{-3 \ ; \ 3\}$. (Vérification par le discriminant : $\Delta = 0 - 4 \times 2 \times (-18) = 144$, $\sqrt{\Delta} = 12$, racines $\dfrac{\pm 12}{4} = \pm 3$.)

Corrigé de l'exercice 4.

1. $2x^2 - 5x + 3 = 2\,(x-1)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) = (x-1)(2x-3)$. On a fait entrer le facteur 2 dans la seconde parenthèse : $2 \times \left(x - \dfrac{3}{2}\right) = 2x - 3$.

2.

   a) Racines 2 et 5, $a = 1$: $A = (x-2)(x-5)$.

   b) Racines -2 et $\dfrac{1}{3}$, $a = 3$: $B = 3\,(x+2)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) = (x+2)(3x-1)$.

   c) $\Delta = 0$, racine double 2 : $C = (x-2)^2$.

   d) $\Delta = -16 < 0$: D n'a pas de racine réelle, il ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

3. $(x+2)(3x-1) = 3x^2 - x + 6x - 2 = 3x^2 + 5x - 2$. On retrouve bien B. ✓

Corrigé de l'exercice 5.

1.

   a) $a = -1$, $b = 4$, $c = -3$. $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4 > 0$. $x_1 = \dfrac{-4-2}{-2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-4+2}{-2} = 1$. Les racines sont 1 et 3.

   b) Avec $a = -1$: $P(x) = -(x-1)(x-3)$.

   c) Comme $a = -1 < 0$, le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. On étudie le signe du trinôme $x^2 - x - 6$. $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$, racines $x_1 = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{1+5}{2} = 3$. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est négatif entre les racines et nul en -2 et 3 :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x^2 - x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'inéquation étant au sens large, les racines sont solutions : $S = [-2\ ;\ 3]$.

3. $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31 < 0$: le trinôme n'a aucune racine, il ne s'annule jamais et garde le signe de $a = 2 > 0$ sur $\mathbb{R}$. Il est donc strictement positif pour tout réel x : $S = \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 6.

1. On résout $-2x^2 + 12x - 10 = 0$. $\Delta = 12^2 - 4 \times (-2) \times (-10) = 144 - 80 = 64 > 0$. $x_1 = \dfrac{-12 - 8}{-4} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-12 + 8}{-4} = 1$. Le bénéfice est nul pour $x = 1$ et $x = 5$, c'est-à-dire pour cent et cinq cents objets.
2. Comme $a = -2 < 0$, $B(x)$ est positif entre les racines : le bénéfice est positif pour $x \in]1\ ;5[$, c'est-à-dire entre cent et cinq cents objets.
3. Le coefficient dominant $a = -2$ est négatif, donc la parabole est tournée vers le bas : la fonction B admet un maximum, atteint au sommet de la parabole.
4. Le sommet est situé sur l'axe de symétrie de la parabole, à mi-chemin des deux racines : $x = \dfrac{1+5}{2} = 3$. Le bénéfice maximal vaut $B(3) = -2 \times 9 + 12 \times 3 - 10 = -18 + 36 - 10 = 8$, soit 8 000 € pour trois cents objets vendus.

Corrigé de l'exercice 7.

1. **Réponse B.** $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1$.
   - A (17) : on a ajouté $4ac$ au lieu de le soustraire $(9 + 8)$.
   - C (−1) : on a calculé $4ac - b^2 = 8 - 9$, formule inversée.
   - D (−17) : on a écrit $(-3)^2 = -9$ (oubli des parenthèses), puis $-9 - 8$.
2. **Réponse C.** $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$, racine double $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{6} = 1$.
   - A : confusion avec l'équation $x^2 = 1$; ici $\Delta = 0$ impose une racine unique.
   - B : c'est le cas $\Delta < 0$ qui ne donne aucune racine ; $\Delta = 0$ en donne une.
   - D : erreur de signe, $-b = -(-6) = 6$ et non -6.
3. **Réponse A.** $\Delta = 25 - 24 = 1$, racines 2 et 3, et $a = 1 > 0$: le trinôme est négatif entre ses racines.
   - B : signe inversé, on a oublié que le trinôme est du signe de a à l'*extérieur* des racines.
   - C : croire que le terme x^2 rend le trinôme toujours positif est faux : pour $x = 2{,}5$, on obtient $6{,}25 - 12{,}5 + 6 = -0{,}25 < 0$.

- D : confusion avec le terme constant $c = 6$, qui n'est pas une racine.

4. **Réponse D.** $a(x - x_1)(x - x_2) = 2\,(x - (-2))(x - 3) = 2(x + 2)(x - 3)$. Vérification : $2(x^2 - x - 6) = 2x^2 - 2x - 12$. ✓

   - A : oubli du facteur $a = 2$; en développant, on obtient $x^2 - x - 6$ et non $2x^2 - 2x - 12$.
   - B : signes des racines inversés ; $x - x_1$ avec $x_1 = -2$ donne $x + 2$.
   - C : le facteur 2 a été appliqué aux deux parenthèses ; en développant, le coefficient de x^2 serait 4.

Corrigé de l'exercice 8.

A. Vrai. Lorsque le discriminant est strictement négatif, le trinôme n'a aucune racine réelle : l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

B. Faux. Un trinôme du second degré a au plus deux racines ($\Delta > 0$), une seule ($\Delta = 0$) ou aucune ($\Delta < 0$). Trois racines est impossible.

C. Faux. Contre-exemple : $x^2 - 1$ a pour coefficient $a = 1 > 0$, mais vaut -1 en $x = 0$. Si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a seulement à l'extérieur des racines.

D. Vrai. $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 4 - 4 = 0$, racine double $x_0 = \dfrac{-2}{-2} = 1$, et $a = -1$: le trinôme s'écrit $-1 \times (x - 1)^2 = -(x - 1)^2$. Vérification : $-(x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 2x - 1$. ✓

E. Faux. $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$: aucune solution réelle. On peut aussi remarquer que $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ pour tout réel x.

F. Vrai. $3^2 - 2 \times 3 - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$: le trinôme s'annule en 3, donc 3 est une racine. (L'autre racine est -1.)

G. Vrai. $\Delta = 0$ signifie que le trinôme s'annule en une seule valeur, la racine double : la parabole touche l'axe des abscisses en ce seul point, qui est son sommet.

H. Faux. $2x^2 - 8 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = -2$ ou $x = 2$. L'erreur consiste à oublier la racine carrée : $x^2 = 4$ ne donne pas $x = 4$.