Le théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore est l'outil fondamental du triangle rectangle : il relie les longueurs des trois côtés. Sa réciproque permet de prouver qu'un triangle est rectangle. La difficulté principale vient de la mémorisation de la formule $a^2 + b^2 = c^2$ sans compréhension géométrique : les élèves retiennent une égalité algébrique sans voir qu'il s'agit de sommes d'aires de carrés, confondent hypoténuse et côtés de l'angle droit, ou oublient d'extraire la racine carrée.

Prérequis : Puissances, Équations. **Pour s'entraîner :** Exercices : théorème de Pythagore.

Théorème 1 (Le théorème de Pythagore, 4e)

Énoncé : dans un triangle **rectangle**, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Hypoténuse : c'est le côté **le plus long**, celui qui est **opposé à l'angle droit**. On le repère en cherchant l'angle droit : le côté qui ne touche pas cet angle est l'hypoténuse.

Si le triangle ABC est rectangle en C, alors :

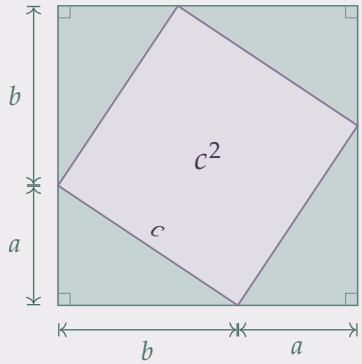
$$\boxed{AB^2 = AC^2 + BC^2}$$

Le côté [AB] est l'hypoténuse (opposé à l'angle droit en C).

Exemples

- Triangle rectangle en C avec AC = 3 cm et BC = 4 cm : $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, donc $AB = \sqrt{25} = 5$ cm.
- Triangle rectangle en A avec BC = 13 cm et AB = 5 cm : $BC^2 = AB^2 + AC^2$, donc $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 169 - 25 = 144$, d'où $AC = \sqrt{144} = 12$ cm.

Pourquoi cette formule ? Construisons un carré de côté $a + b$ et plaçons-y quatre triangles rectangles identiques de côtés a et b. L'espace restant au centre forme un carré de côté c (l'hypoténuse).



L'aire totale donne $(a+b)^2 = 4 \times \dfrac{ab}{2} + c^2$, ce qui se simplifie en $a^2 + b^2 = c^2$. Le théorème exprime donc une **relation entre les aires** des carrés construits sur les côtés.

Exercice 1 *Calculer l'hypoténuse (4e)* Pour chaque triangle rectangle, calculer la longueur manquante. **Attention : le triangle n'est pas toujours dessiné dans la même position.**

1. Le triangle EFG est rectangle en G, avec EG = 6 cm et FG = 8 cm. Calculer EF.
2. Le triangle RST est rectangle en T, avec RT = 5 cm et ST = 12 cm. Calculer RS.
3. Le triangle KLM est rectangle en L, avec KL = 9 cm et LM = 40 cm. Calculer KM.

Calculer un côté de l'angle droit (4e)

Quand c'est **un côté de l'angle droit** qui est inconnu, on isole ce côté dans l'égalité de Pythagore.

Si le triangle ABC est rectangle en C et que l'on cherche AC :

$$AC^2 = AB^2 - BC^2$$

On soustrait le carré du côté connu **au carré de l'hypoténuse**.

Exemples Triangle rectangle en C avec AB = 10 cm et BC = 6 cm :
$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 100 - 36 = 64$, donc $AC = \sqrt{64} = 8$ cm.

Attention : ne jamais oublier d'extraire la racine carrée. $AC^2 = 64$ *ne signifie pas que* $AC = 64$ *: il faut écrire* $AC = \sqrt{64} = 8$.

Exercice 2 *Calculer un côté de l'angle droit (4e)*

1. Le triangle ABC est rectangle en B, avec AC = 17 cm et BC = 15 cm. Calculer AB.
2. Le triangle DEF est rectangle en E, avec DF = 25 cm et DE = 7 cm. Calculer EF.
3. Le triangle PQR est rectangle en Q, avec PR = 10 cm et PQ = 4 cm. Calculer QR. Le résultat est-il un nombre entier ?

Théorème 2 (Réciproque du théorème de Pythagore, 4e)

La réciproque permet de **prouver qu'un triangle est rectangle** à partir de ses longueurs.

Méthode : on identifie le plus grand côté, puis on compare le carré de ce côté à la somme des carrés des deux autres.

- Si l'égalité est vérifiée : le triangle est rectangle et l'angle droit est opposé au plus grand côté.
- Si l'égalité n'est pas vérifiée : le triangle n'est pas rectangle.

Exemples

- Triangle de côtés 5, 12 et 13 : le plus grand côté est 13.
  $13^2 = 169$ et $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Comme $13^2 = 5^2 + 12^2$, le triangle est rectangle.
- Triangle de côtés 4, 5 et 7 : le plus grand côté est 7.
  $7^2 = 49$ et $4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$. Comme $49 \neq 41$, le triangle n'est pas rectangle.

Exercice 3 *Le triangle est-il rectangle ? (4e)* Pour chaque triangle, dire s'il est rectangle ou non. Justifier.

1. Triangle ABC avec AB = 15 cm, BC = 20 cm et AC = 25 cm.
2. Triangle DEF avec DE = 6 cm, EF = 9 cm et DF = 12 cm.
3. Triangle GHI avec GH = 8 cm, HI = 15 cm et GI = 17 cm.

Exercice 4 *Problème en contexte (4e–3e)* Un écran de télévision a une diagonale de 55 pouces (1 pouce = 2,54 cm). L'écran est au format 16/9, ce qui signifie que le rapport entre la largeur et la hauteur vaut $\frac{16}{9}$.

1. Soit h la hauteur de l'écran en pouces. Exprimer la largeur en fonction de h.
2. En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que $h^2 \times \left(1 + \frac{256}{81}\right) = 55^2$.
3. En déduire la valeur de h arrondie au dixième de pouce, puis convertir la hauteur et la largeur en centimètres.

⚠ Erreurs classiques sur le théorème de Pythagore

Erreur	Exemple faux	Correction
Oublier la racine carrée	$c = a^2 + b^2$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$: il faut extraire la racine
Se tromper d'hypoténuse	Écrire $AC^2 = AB^2 + BC^2$ quand l'angle droit est en C	L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit : ici c'est [AB]
Additionner au lieu de soustraire	$AC^2 = AB^2 + BC^2$ pour trouver un côté de l'angle droit	Pour un côté de l'angle droit, on soustrait : $AC^2 = AB^2 - BC^2$
Appliquer Pythagore à un triangle non rectangle	Utiliser $a^2 + b^2 = c^2$ dans un triangle quelconque	Le théorème ne s'applique qu'aux triangles **rectangles**. Vérifier d'abord la présence d'un angle droit
Confondre côtés et longueurs	Écrire $[AB]^2$ au lieu de AB^2	[AB] est un segment (objet géométrique), AB est sa longueur (un nombre). On met au carré la **longueur**

Exercice 5 *QCM (4^e)* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. Un triangle rectangle a des côtés de l'angle droit mesurant 6 cm et 8 cm. L'hypoténuse mesure :

   A. 14 cm **B.** 10 cm **C.** 100 cm **D.** 48 cm

2. Un triangle a des côtés de longueurs 7, 24 et 25. Ce triangle est :

   A. équilatéral **B.** rectangle **C.** isocèle **D.** quelconque

3. Le triangle ABC est rectangle en A, avec AB = 3 cm et AC = 4 cm. Le côté BC mesure :

   A. 7 cm **B.** $\sqrt{7}$ cm **C.** 5 cm **D.** 25 cm

4. Le triangle DEF est rectangle en F, avec DE = 13 cm et DF = 12 cm. Le côté EF mesure :

   A. 1 cm **B.** $\sqrt{313}$ cm **C.** 5 cm **D.** 25 cm

5. Un triangle ABC a des côtés mesurant AB = 3 cm, AC = 4 cm et BC = 6 cm. Ce triangle est :

   A. rectangle en A **B.** rectangle en B **C.** rectangle en C **D.** non rectangle

Exercice 6 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Le théorème de Pythagore s'applique à tous les triangles.

B. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est toujours le côté horizontal.

C. Si $AB^2 = AC^2 + BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en C.

D. Un triangle dont les côtés mesurent 3 cm, 4 cm et 6 cm est rectangle.

E. $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ pour tous nombres positifs a et b.

F. Si un triangle a un angle droit en C, alors [AB] est l'hypoténuse.

Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche ***Que faire quand je bloque ?***
Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche ***Mémorisation et sciences cognitives****.*
Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton ***Carnet d'erreurs****.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1. Dans chaque cas, on identifie d'abord l'hypoténuse : c'est le côté opposé à l'angle droit.

1. Triangle EFG rectangle en G : l'hypoténuse est le côté [EF] (opposé à l'angle droit en G).

   D'après le théorème de Pythagore : $EF^2 = EG^2 + FG^2$.

   $EF^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

   $EF = \sqrt{100} = 10$ cm.

2. Triangle RST rectangle en T : l'hypoténuse est le côté [RS] (opposé à l'angle droit en T).

   D'après le théorème de Pythagore : $RS^2 = RT^2 + ST^2$.

   $RS^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.

   $RS = \sqrt{169} = 13$ cm.

3. Triangle KLM rectangle en L : l'hypoténuse est le côté [KM] (opposé à l'angle droit en L).

   D'après le théorème de Pythagore : $KM^2 = KL^2 + LM^2$.

   $KM^2 = 9^2 + 40^2 = 81 + 1\,600 = 1\,681$.

   $KM = \sqrt{1\,681} = 41$ cm.

Corrigé de l'exercice 2.

1. Triangle ABC rectangle en B : l'hypoténuse est le côté [AC] (opposé à l'angle droit en B).

   $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64$.

   $AB = \sqrt{64} = 8$ cm.

2. Triangle DEF rectangle en E : l'hypoténuse est le côté [DF] (opposé à l'angle droit en E).

   $EF^2 = DF^2 - DE^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576$.

   $EF = \sqrt{576} = 24$ cm.

3. Triangle PQR rectangle en Q : l'hypoténuse est le côté [PR] (opposé à l'angle droit en Q).

   $QR^2 = PR^2 - PQ^2 = 10^2 - 4^2 = 100 - 16 = 84$.

   $QR = \sqrt{84} \approx 9{,}17$ cm.

   Le résultat n'est pas un nombre entier : $\sqrt{84}$ est un nombre irrationnel. On peut aussi l'écrire $\sqrt{84} = 2\sqrt{21}$, mais en pratique on donne la valeur approchée.

Corrigé de l'exercice 3.

1. Le plus grand côté est AC = 25 cm.

   $AC^2 = 25^2 = 625$.

$AB^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$.

Comme $AC^2 = AB^2 + BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

2. Le plus grand côté est DF = 12 cm.

   $DF^2 = 12^2 = 144$.

   $DE^2 + EF^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117$.

   Comme $144 \neq 117$, le triangle DEF n'est pas rectangle.

3. Le plus grand côté est GI = 17 cm.

   $GI^2 = 17^2 = 289$.

   $GH^2 + HI^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$.

   Comme $GI^2 = GH^2 + HI^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle GHI est rectangle en H.

Corrigé de l'exercice 4.

1. Le rapport largeur/hauteur vaut $\frac{16}{9}$, donc la largeur est $\ell = \frac{16}{9} \times h$.

2. L'écran est un rectangle : la diagonale, la hauteur et la largeur forment un triangle rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

   $$h^2 + \ell^2 = 55^2$$

   En remplaçant ℓ par $\frac{16}{9}h$:

   $$h^2 + \left(\frac{16}{9}h\right)^2 = 55^2$$

   $$h^2 + \frac{256}{81}h^2 = 55^2$$

   $$h^2 \times \left(1 + \frac{256}{81}\right) = 55^2$$

3. $1 + \frac{256}{81} = \frac{81 + 256}{81} = \frac{337}{81}$.

   Donc $h^2 = \frac{55^2 \times 81}{337} = \frac{3\,025 \times 81}{337} = \frac{245\,025}{337} \approx 727{,}1$.

   $h = \sqrt{727{,}1} \approx 27{,}0$ pouces.

   La largeur : $\ell = \frac{16}{9} \times h \approx 47{,}9$ pouces (en gardant la valeur non arrondie $h \approx 26{,}96$; avec $h = 27{,}0$ on obtiendrait 48,0).

   En centimètres : hauteur $\approx 27{,}0 \times 2{,}54 \approx 68{,}6$ cm et largeur $\approx 47{,}9 \times 2{,}54 \approx 121{,}7$ cm.

Corrigé de l'exercice 5.

1. **Réponse B.** $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ cm.
   - A (14 cm) : erreur d'addition des côtés ($6 + 8 = 14$) au lieu de la somme des carrés.
   - C (100 cm) : oubli de la racine carrée : $6^2 + 8^2 = 100$, mais la longueur est $\sqrt{100} = 10$.
   - D (48 cm) : confusion avec le produit ($6 \times 8 = 48$), aucun rapport avec Pythagore.
2. **Réponse B.** $25^2 = 625$ et $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$. L'égalité de Pythagore est vérifiée : le triangle est rectangle.
   - A : un triangle équilatéral a trois côtés égaux, ce n'est pas le cas ici.
   - C : aucun côté n'est en double, donc il n'est pas isocèle.
   - D : on vient de prouver qu'il est rectangle.
3. **Réponse C.** Le triangle est rectangle en A, donc l'hypoténuse est [BC]. $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25$, d'où BC = 5 cm.
   - A (7 cm) : erreur d'addition directe ($3 + 4 = 7$).
   - B ($\sqrt{7}$ cm) : erreur de soustraction ($4^2 - 3^2 = 7$) appliquée dans le mauvais sens.
   - D (25 cm) : oubli de la racine carrée.
4. **Réponse C.** Le triangle est rectangle en F, donc l'hypoténuse est [DE]. $EF^2 = DE^2 - DF^2 = 169 - 144 = 25$, d'où EF = 5 cm.
   - A (1 cm) : soustraction des longueurs ($13 - 12 = 1$) au lieu des carrés.
   - B ($\sqrt{313}$ cm) : addition des carrés ($169 + 144 = 313$) au lieu d'une soustraction.
   - D (25 cm) : oubli de la racine carrée.
5. **Réponse D.** Le plus grand côté est BC = 6 cm. $BC^2 = 36$ et $AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25$. Comme $36 \neq 25$, le triangle n'est pas rectangle (s'il l'était, l'angle droit serait en A, sommet opposé au plus grand côté [BC]).
   - A, B, C : piège pour les élèves qui pensent à tort que (3 ; 4 ; 6) est un triplet pythagoricien comme (3 ; 4 ; 5). Les longueurs ont beau commencer par 3 et 4, le troisième côté (6) ne vérifie pas l'égalité de Pythagore.

Corrigé de l'exercice 6.

A. Faux. Le théorème de Pythagore ne s'applique qu'aux triangles **rectangles**. Pour un triangle quelconque, il faut utiliser la loi des cosinus (formule d'Al-Kashi).

B. Faux. L'hypoténuse est le côté **opposé à l'angle droit**, quelle que soit l'orientation du triangle. Un triangle rectangle peut être dessiné dans n'importe quelle position : l'hypoténuse peut être verticale, en diagonale, etc.

C. Vrai. Si $AB^2 = AC^2 + BC^2$, alors [AB] est le plus grand côté et, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle. L'angle droit est opposé au côté [AB], c'est-à-dire en C.

D. Faux. Le plus grand côté est 6 cm. $6^2 = 36$ et $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Comme $36 \neq 25$, le triangle n'est pas rectangle. Il ne faut pas confondre avec le triplet pythagoricien $(3\ ;\ 4\ ;\ 5)$.

E. Faux. Par exemple, $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, alors que $3 + 4 = 7$. La racine carrée d'une somme n'est pas la somme des racines carrées.

F. Vrai. L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. Si l'angle droit est en C, le côté opposé est bien [AB].