La proportionnalité

La proportionnalité est le fil rouge du collège : elle intervient dans les pourcentages, les vitesses, les échelles, les conversions, les recettes de cuisine, les agrandissements et réductions. La difficulté principale vient de l'application aveugle du produit en croix sans compréhension, du raisonnement additif au lieu du raisonnement multiplicatif, et de l'incapacité à reconnaître les situations qui ne sont pas proportionnelles.

Prérequis : Fractions. **Pour s'entraîner :** Exercices : proportionnalité.

Reconnaître une situation de proportionnalité (6e–4e)

Deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsque l'on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre. Ce nombre s'appelle le **coefficient de proportionnalité**.

Comment vérifier ? On calcule le rapport $\dfrac{\text{deuxième grandeur}}{\text{première grandeur}}$ pour chaque couple de valeurs. Si tous les rapports sont égaux, la situation est proportionnelle.

Exemples

Masse de pommes (kg)	2	3	5	8
Prix (€)	3,40	5,10	8,50	13,60

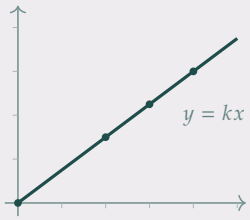
$$\frac{3{,}40}{2} = 1{,}70 \quad \frac{5{,}10}{3} = 1{,}70 \quad \frac{8{,}50}{5} = 1{,}70 \quad \frac{13{,}60}{8} = 1{,}70.$$

Tous les rapports sont égaux à 1,70 : le prix est proportionnel à la masse. Le coefficient de proportionnalité est 1,70 €/kg (c'est le prix au kilogramme).

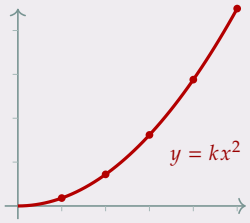
Attention : toutes les situations à deux grandeurs ne sont pas proportionnelles. L'âge d'une personne et sa taille ne sont pas proportionnels : un enfant de 4 ans ne mesure pas le double d'un enfant de 2 ans. De même, le périmètre d'un carré est proportionnel à son côté, mais son aire ne l'est pas.

Comment le voir sur un graphique ? Si l'on place les couples de valeurs dans un repère, une situation de proportionnalité donne toujours des points alignés **sur une droite passant par l'origine**. Si les points ne sont pas alignés, ou s'ils forment une droite qui ne passe pas par l'origine, la situation n'est pas proportionnelle.

Proportionnel



Non proportionnel



Exercice 1 *Proportionnel ou non ? (6e–5e)* Pour chaque tableau, dire si les grandeurs sont proportionnelles. Justifier en calculant les rapports.

1.

Nombre de cahiers	3	5	8
Prix total (€)	4,50	7,50	12

2.

Âge (ans)	5	10	15
Taille (cm)	110	140	165

3.

Côté du carré (cm)	2	4	6
Aire du carré (cm²)	4	16	36

Plusieurs méthodes pour résoudre un problème de proportionnalité (5e–4e)

Il existe plusieurs procédures pour trouver une quatrième proportionnelle. Chacune a ses avantages selon le contexte.

Situation : 3 kg de cerises coûtent 12 €. Combien coûtent 7 kg ?

Retour à l'unité : on cherche d'abord le prix de 1 kg.

1 kg coûte $\frac{12}{3} = 4$ €. Donc 7 kg coûtent $7 \times 4 = 28$ €.

Coefficient de proportionnalité : on détermine par combien multiplier la masse pour obtenir le prix.

Coefficient : $\frac{12}{3} = 4$. Donc le prix de 7 kg est $7 \times 4 = 28$ €.

Propriété de linéarité : on combine des colonnes connues.

$7 = 3 + 3 + 1$. Prix de 3 kg = 12 €, prix de 1 kg = 4 €. Donc prix de 7 kg = $12 + 12 + 4 = 28$ €.

On peut aussi utiliser la propriété multiplicative : 7 kg = $\frac{7}{3} \times 3$ kg, donc le prix est $\frac{7}{3} \times 12 = 28$ €.

Produit en croix : si $\frac{3}{12} = \frac{7}{x}$, alors $x = \frac{7 \times 12}{3} = 28$ €.

Le produit en croix est pratique, mais il ne faut pas le réduire à un geste mécanique. Il traduit simplement l'égalité des rapports : si deux grandeurs sont proportionnelles, les rapports correspondants sont égaux.

Exercice 2 *Appliquer plusieurs méthodes (5e–4e)* 5 litres de peinture couvrent 40 m² de mur.

1. Par la méthode du retour à l'unité : combien de m² couvre 1 litre ? En déduire la surface couverte par 8 litres.
2. Par le coefficient de proportionnalité : quel est le coefficient qui permet de passer du volume (en litres) à la surface (en m²) ? Calculer la surface couverte par 8 litres.
3. Par la propriété de linéarité : en remarquant que $8 = 5 + 3$, calculer d'abord la surface couverte par 3 litres, puis celle de 8 litres.
4. Par le produit en croix : poser l'égalité des rapports et calculer.
5. Quelle méthode trouves-tu la plus naturelle ? Pourquoi ?

Propriété 1 (Pourcentages et proportionnalité, 4e–3e)

Un pourcentage est un cas particulier de proportionnalité : « 25 % de x » signifie $\frac{25}{100} \times x = 0{,}25 \times x$.

Appliquer un pourcentage : pour calculer p % de N, on calcule $\frac{p}{100} \times \mathrm{N}$.

Augmenter de p % : on multiplie par $1 + \frac{p}{100}$. Exemple : augmenter de 20 %, c'est multiplier par 1,20.

Diminuer de p % : on multiplie par $1 - \frac{p}{100}$. Exemple : une réduction de 30 %, c'est multiplier par 0,70.

Trouver un pourcentage : $p = \frac{\text{partie}}{\text{total}} \times 100$.

Exemples

- 15 % de 80 € = $0{,}15 \times 80 = 12$ €.
- Un article à 50 € augmente de 10 % : nouveau prix = $50 \times 1{,}10 = 55$ €.
- Un article à 120 € baisse de 25 % : nouveau prix = $120 \times 0{,}75 = 90$ €.
- Sur 200 élèves, 48 sont demi-pensionnaires : $\frac{48}{200} \times 100 = 24$ %.

Exercice 3 *Pourcentages (4e–3e)*

1. Un magasin propose une réduction de 15 % sur un pantalon à 80 €.
   a) Calculer le montant de la réduction.
   b) Calculer le prix après réduction.
   c) Retrouver ce résultat en multipliant 80 par le coefficient approprié.
2. Le prix d'un abonnement passe de 45 € à 54 €. Quel est le pourcentage d'augmentation ?

3. Après une hausse de 20 %, un vélo coûte 360 €. Quel était son prix avant la hausse ?

Propriété 2 (Grandeurs physiques et proportionnalité, 5e–3e)

Plusieurs grandeurs physiques courantes sont liées par la proportionnalité.

Vitesse constante : $d = v \times t$ (distance = vitesse × temps). La distance est proportionnelle au temps si la vitesse est constante.

Échelle d'un plan : $\text{échelle} = \dfrac{\text{distance sur le plan}}{\text{distance réelle}}$. La distance sur le plan est proportionnelle à la distance réelle.

Prix au kilogramme : le prix total est proportionnel à la masse si le prix unitaire est fixe.

Conversion d'unités : 1 km = 1 000 m, 1 h = 60 min, 1 € = 100 centimes, etc.

Exemples

- Une voiture roule à 90 km/h. En 2,5 h, elle parcourt $90 \times 2{,}5 = 225$ km.
- Sur un plan à l'échelle $\dfrac{1}{500}$, 3 cm représentent $3 \times 500 = 1\,500$ cm = 15 m en réalité.

Exercice 4 *Vitesse et distance (5^e–4^e)*

1. Un cycliste roule à une vitesse constante de 24 km/h.
   a) Quelle distance parcourt-il en 45 minutes ?
   b) Combien de temps lui faut-il pour parcourir 60 km ?
2. Un train parcourt 180 km en 1 h 30 min, puis 120 km en 1 h.
   a) Calculer la vitesse moyenne sur chaque tronçon.
   b) La distance parcourue est-elle proportionnelle au temps sur l'ensemble du trajet ? Justifier.

Exercice 5 *Échelle d'un plan (5^e–4^e)* Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{250}$:

1. Une pièce mesure 6 cm de long sur le plan. Quelle est sa longueur réelle ?
2. La largeur réelle de la pièce est 3,75 m. Quelle est sa largeur sur le plan ?
3. L'aire de la pièce sur le plan est-elle proportionnelle à l'aire réelle ? Justifier.

Exercice 6 *Proportionnel ou non ? Situations en contexte (4^e–3^e)* Pour chaque situation, dire si les grandeurs sont proportionnelles ou non. Justifier.

1. Un taxi facture une prise en charge de 3,50 € plus 1,20 € par kilomètre. Le prix est-il proportionnel à la distance ?
2. Un robinet remplit une baignoire à débit constant de 12 litres par minute. Le volume d'eau est-il proportionnel au temps ?
3. Le nombre de parts de pizza et la quantité de pizza par personne (pour une pizza de taille fixe).
4. La longueur du côté d'un carré et son périmètre.

Exercice 7 *Problème de synthèse (4^e–3^e)* Une recette de crêpes pour 6 personnes nécessite : 250 g de farine, 4 œufs, 50 cL de lait et 30 g de beurre.

1. Calculer les quantités nécessaires pour 9 personnes en utilisant la méthode de ton choix.
2. On n'a que 3 œufs. Pour combien de personnes peut-on préparer la recette ?
3. Pour ce nombre de personnes, calculer les quantités de farine, de lait et de beurre.
4. Un camarade dit : « pour 9 personnes, il suffit d'ajouter les quantités de 6 personnes et 3 personnes. » A-t-il raison ? Justifier en vérifiant avec la farine.

⚠ Erreurs classiques sur la proportionnalité

Erreur	Exemple faux	Correction
Raisonnement additif au lieu de multiplicatif	« 3 kg coûtent 12 €, donc 7 kg coûtent 12 + 4 = 16 € (car 7 = 3 + 4) »	Les prix ne s'additionnent pas comme les masses : 7 kg coûtent $\frac{12}{3} \times 7 = 28$ €
Appliquer la proportionnalité sans vérifier	« J'ai 10 ans et je mesure 130 cm, donc à 20 ans je mesurerai 260 cm »	L'âge et la taille ne sont pas proportionnels : vérifier les rapports avant de conclure
Produit en croix sans compréhension	Inverser les termes dans le produit en croix	Poser l'égalité des rapports avant de croiser
Confondre variation du prix initial et final	20 % de hausse puis 20 % de baisse = 0	$100 \times 1{,}20 = 120$, puis $120 \times 0{,}80 = 96 \neq 100$: ce n'est pas symétrique
Confondre proportionnalité directe et inverse	« Plus de personnes = plus de pizza par personne »	Plus de personnes = **moins** de pizza par personne : c'est la proportionnalité inverse

Exercice 8 *QCM (5e–3e)* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. 4 kg de tomates coûtent 6 €. Le prix de 10 kg est :
   A. 12 € **B.** 15 € **C.** 16 € **D.** 24 €
2. Un article coûte 80 €. Après une réduction de 25 %, le nouveau prix est :
   A. 55 € **B.** 60 € **C.** 65 € **D.** 20 €
3. Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{200}$, 4 cm sur le plan représentent en réalité :
   A. 80 cm **B.** 8 m **C.** 80 m **D.** 50 m
4. Un prix passe de 200 € à 250 €. Le pourcentage d'augmentation est :
   A. 20 % **B.** 25 % **C.** 50 % **D.** 125 %
5. Parmi ces situations, laquelle n'est pas une situation de proportionnalité ?
   A. Le prix de l'essence au litre **B.** Le périmètre d'un carré et son côté
   C. L'aire d'un carré et son côté **D.** La conversion km en m

Exercice 9 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Si un tableau de proportionnalité contient les couples $(2\ ;\ 6)$ et $(5\ ;\ 15)$, alors le coefficient de proportionnalité est 3.
B. Si 3 kg de pommes coûtent 6 €, alors 6 kg coûtent 18 €.
C. Une augmentation de 50 % suivie d'une diminution de 50 % ramène au prix initial.
D. Le graphique d'une situation de proportionnalité est toujours une droite passant par l'origine.
E. Si on double le rayon d'un cercle, son périmètre double aussi.
F. Si on double le côté d'un carré, son aire double aussi.
G. Le produit en croix ne fonctionne que si la situation est proportionnelle.
H. Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{50\,000}$, 2 cm représentent 1 km.

Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche ***Que faire quand je bloque ?***
Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche ***Mémorisation et sciences cognitives****.*
Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton ***Carnet d'erreurs****.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. On calcule les rapports : $\frac{4{,}50}{3} = 1{,}50$ $\frac{7{,}50}{5} = 1{,}50$ $\frac{12}{8} = 1{,}50$.

   Tous les rapports sont égaux à 1,50 : les grandeurs sont **proportionnelles**. Le coefficient est 1,50 € par cahier.

2. On calcule les rapports : $\frac{110}{5} = 22$ $\frac{140}{10} = 14$ $\frac{165}{15} = 11$.

   Les rapports ne sont pas égaux : les grandeurs ne sont **pas proportionnelles**. Un enfant de 10 ans ne mesure pas le double d'un enfant de 5 ans.

3. On calcule les rapports : $\frac{4}{2} = 2$ $\frac{16}{4} = 4$ $\frac{36}{6} = 6$.

   Les rapports ne sont pas égaux : l'aire d'un carré n'est **pas proportionnelle** à son côté. En effet, l'aire est c^2, ce qui est une relation quadratique, pas linéaire.

Corrigé de l'exercice 2.

1. **Retour à l'unité :** 1 litre couvre $\frac{40}{5} = 8$ m².

   Donc 8 litres couvrent $8 \times 8 = 64$ m².

2. **Coefficient :** $\frac{40}{5} = 8$. Le coefficient de proportionnalité est 8 m²/L.

   Surface pour 8 litres : $8 \times 8 = 64$ m².

3. **Linéarité :** 3 litres couvrent $\frac{3}{5} \times 40 = 24$ m².

   8 litres = 5 litres +3 litres, donc $40 + 24 = 64$ m².

4. **Produit en croix :** $\frac{5}{40} = \frac{8}{x}$, donc $x = \frac{8 \times 40}{5} = \frac{320}{5} = 64$ m².

5. Question ouverte : le retour à l'unité est souvent le plus intuitif car il donne un sens concret au coefficient (8 m² par litre). Le produit en croix est le plus rapide quand on maîtrise la technique.

Corrigé de l'exercice 3.

1.

   a) Montant de la réduction : 15 % de 80 = $0{,}15 \times 80 = 12$ €.

   b) Prix après réduction : $80 - 12 = 68$ €.

   c) Coefficient multiplicateur : $1 - 0{,}15 = 0{,}85$. Donc $80 \times 0{,}85 = 68$ €. On retrouve le même résultat.

2. L'augmentation est de $54 - 45 = 9$ €.

   Pourcentage : $\frac{9}{45} \times 100 = 20$ %.

L'abonnement a augmenté de 20 %.

3. Après une hausse de 20 %, le prix a été multiplié par 1,20.

   Prix initial : $\dfrac{360}{1{,}20} = 300$ €.

   Attention : on ne peut pas calculer 20 % *de* 360 *et soustraire :* $360 - 72 = 288 \neq 300$. *Les* 20 % *s'appliquent au prix* ***initial****, pas au prix final.*

Corrigé de l'exercice 4.

1.

   a) 45 min $= \dfrac{45}{60} = 0{,}75$ h.

   Distance $= 24 \times 0{,}75 = 18$ km.

   b) Temps $= \dfrac{60}{24} = 2{,}5$ h $= 2$ h 30 min.

2.

   a) Premier tronçon : $v_1 = \dfrac{180}{1{,}5} = 120$ km/h.

   Second tronçon : $v_2 = \dfrac{120}{1} = 120$ km/h.

   b) La vitesse est la même sur les deux tronçons (120 km/h) : la distance est **proportionnelle** au temps sur l'ensemble du trajet. Le coefficient est 120 km/h.

Corrigé de l'exercice 5.

1. Longueur réelle $= 6 \times 250 = 1\,500$ cm $= 15$ m.
2. Largeur sur le plan $= \dfrac{375}{250} = 1{,}5$ cm (on convertit d'abord 3,75 m = 375 cm).
3. L'aire sur le plan n'est pas directement proportionnelle à l'aire réelle au même coefficient. Si les longueurs sont multipliées par 250, les aires sont multipliées par $250^2 = 62\,500$. L'aire réelle est $15 \times 3{,}75 = 56{,}25$ m² et l'aire sur le plan est $6 \times 1{,}5 = 9$ cm² $= 0{,}0009$ m². Le rapport est $\dfrac{56{,}25}{0{,}0009} = 62\,500 = 250^2$. Les aires sont proportionnelles entre elles, mais le coefficient est le carré de l'échelle.

Corrigé de l'exercice 6.

1. **Non proportionnel.** Pour 5 km : $3{,}50 + 5 \times 1{,}20 = 9{,}50$ €. Pour 10 km : $3{,}50 + 10 \times 1{,}20 = 15{,}50$ €. Le rapport $\dfrac{9{,}50}{5} = 1{,}90$ et $\dfrac{15{,}50}{10} = 1{,}55$: les rapports ne sont pas égaux. La prise en charge fixe empêche la proportionnalité.
2. **Proportionnel.** Le débit est constant : en t minutes, le volume est $12 \times t$. Le coefficient de proportionnalité est 12 L/min.

3. **Non proportionnel.** Si on partage entre 2 personnes, chacune a $\frac{1}{2}$ pizza. Entre 4 personnes, chacune a $\frac{1}{4}$ pizza. Quand le nombre de parts double, la quantité par personne est divisée par 2, pas multipliée par 2 : c'est une relation de proportionnalité **inverse** (le produit nombre × quantité est constant).
4. **Proportionnel.** Le périmètre d'un carré est $4 \times c$, où c est le côté. Le coefficient de proportionnalité est 4.

Corrigé de l'exercice 7.

1. On passe de 6 à 9 personnes, soit un coefficient de $\frac{9}{6} = 1{,}5$.
   - Farine : $250 \times 1{,}5 = 375$ g ;
   - œufs : $4 \times 1{,}5 = 6$;
   - lait : $50 \times 1{,}5 = 75$ cL ;
   - beurre : $30 \times 1{,}5 = 45$ g.
2. Avec 3 œufs, le coefficient est $\frac{3}{4} = 0{,}75$. Nombre de personnes : $6 \times 0{,}75 = 4{,}5$ personnes. Bien sûr, en pratique, on cuisinerait pour 4 ou 5 personnes, mais mathématiquement la proportionnalité donne 4,5.
3. Pour 4,5 personnes (coefficient 0,75) :
   - farine : $250 \times 0{,}75 = 187{,}5$ g ;
   - lait : $50 \times 0{,}75 = 37{,}5$ cL ;
   - beurre : $30 \times 0{,}75 = 22{,}5$ g.
4. Oui, il a raison : c'est la **propriété additive** de la proportionnalité. Si les quantités pour 6 personnes et pour 3 personnes sont connues, on peut les additionner pour obtenir les quantités pour 9 personnes.

   Vérification avec la farine : pour 3 personnes, $250 \times \frac{3}{6} = 125$ g. Pour 6 personnes : 250 g. Total : $125 + 250 = 375$ g, ce qui correspond bien à ce que l'on a trouvé à la question 1.

Corrigé de l'exercice 8.

1. **Réponse B.** Prix au kg : $\frac{6}{4} = 1{,}50$ €. Prix de 10 kg : $10 \times 1{,}50 = 15$ €.
   - A (12 €) : erreur de calcul, on a multiplié par 2 au lieu de 2,5.
   - C (16 €) : erreur, on a ajouté $6 + 10 = 16$ (raisonnement additif).
   - D (24 €) : erreur, on a multiplié $6 \times 4 = 24$ (produit en croix inversé).
2. **Réponse B.** $80 \times 0{,}75 = 60$ € (ou : 25 % de 80 = 20, donc $80 - 20 = 60$ €).

- A (55 €) : erreur de calcul ($80 - 25 = 55$, on a soustrait le pourcentage au lieu du montant).
- C (65 €) : erreur ($80 - 15 = 65$, confusion entre 15 % et 25 %).
- D (20 €) : c'est le montant de la réduction, pas le prix final.

3. **Réponse B.** $4 \times 200 = 800$ cm $= 8$ m.
   - A (80 cm) : erreur, on a multiplié par 20 au lieu de 200.
   - C (80 m) : erreur d'un facteur 10 dans la conversion cm $\rightarrow$ m : $4 \times 200 = 800$ cm $= 8$ m, pas 80 m.
   - D (50 m) : erreur de division ($200 \div 4 = 50$, on a inversé le sens de l'échelle).
4. **Réponse B.** Augmentation : $250 - 200 = 50$ €. Pourcentage : $\dfrac{50}{200} \times 100 = 25$ %.
   - A (20 %) : erreur, on a calculé $\dfrac{50}{250} \times 100 = 20$ % (division par le prix final au lieu du prix initial).
   - C (50 %) : erreur, on a pris l'augmentation en euros comme pourcentage.
   - D (125 %) : erreur, on a calculé $\dfrac{250}{200} \times 100 = 125$ % (c'est le rapport, pas le pourcentage d'augmentation).
5. **Réponse C.** L'aire d'un carré est c^2 : elle n'est pas proportionnelle au côté (c'est une relation quadratique). Les trois autres sont des situations de proportionnalité.

Corrigé de l'exercice 9.

A. Vrai. $\dfrac{6}{2} = 3$ et $\dfrac{15}{5} = 3$. Les rapports sont égaux : le coefficient est bien 3.

B. Faux. 6 kg $= 2 \times 3$ kg, donc le prix est $2 \times 6 = 12$ € (et non 18 €). L'erreur vient du raisonnement additif : on a ajouté $6 + 6 + 6 = 18$ au lieu de multiplier par 2.

C. Faux. Si le prix initial est 100 € : après +50 %, il vaut 150 €. Après −50 %, il vaut $150 \times 0{,}50 = 75$ €. On n'est pas revenu à 100 €. La baisse de 50 % s'applique au prix augmenté, pas au prix initial.

D. Vrai. Si $y = k \times x$ (avec k constant), le graphique est une droite passant par l'origine de pente k. C'est la caractéristique graphique de la proportionnalité.

E. Vrai. Le périmètre d'un cercle est $2\pi r$. Si on double r, le périmètre devient $2\pi \times 2r = 2 \times (2\pi r)$: il double. Le périmètre est proportionnel au rayon.

F. Faux. L'aire d'un carré est c^2. Si on double le côté, l'aire devient $(2c)^2 = 4c^2$: elle est multipliée par 4, pas par 2. L'aire n'est pas proportionnelle au côté.

G. Vrai. Le produit en croix traduit l'égalité de deux rapports. Si la situation n'est pas proportionnelle, les rapports ne sont pas égaux et le produit en croix donne un résultat faux. Il faut toujours vérifier la proportionnalité avant d'appliquer le produit en croix.

H. Vrai. 2 cm sur la carte représentent $2 \times 50\,000 = 100\,000$ cm en réalité, soit 1 000 m = 1 km.