Le produit scalaire — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur le produit scalaire. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver les deux formules (coordonnées, normes et angle) et le critère d'orthogonalité. Le repère est toujours orthonormé. Écris la formule utilisée avant de remplacer.

Exercice 1 ***Calculer avec les coordonnées, étape par étape (1re).***

1. On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$. Compléter :

   $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' = 3\times(\ldots\ldots) + \ldots\ldots \times \ldots\ldots = \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots$

2. Calculer les produits scalaires suivants :

   a) $\vec{a}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\vec{b}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} = \ldots\ldots$

   b) $\vec{c}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\cdot\vec{d}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \ldots\ldots$

   c) $\vec{e}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\cdot\vec{f}\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix} = \ldots\ldots$

   d) $\vec{g}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\cdot\vec{g}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = \ldots\ldots$

3. On donne A(2 ; 1), B(5 ; 3) et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{w}$.

Exercice 2 ***Calculer avec les normes et l'angle (1re).***

1. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chaque cas :

   a) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\theta = 60°$: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \ldots\ldots$

   b) $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\theta = 90°$: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \ldots\ldots$

   c) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\theta = 120°$: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \ldots\ldots$

   d) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\theta = 45°$: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \ldots\ldots$

2. Calculer la norme de chaque vecteur : $\vec{a}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{c}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

   $\|\vec{a}\| = \ldots\ldots$ $\|\vec{b}\| = \ldots\ldots$ $\|\vec{c}\| = \ldots\ldots$

Exercice 3 ***Norme et carré scalaire (1re).***

1. On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{u}$ de deux façons : avec les coordonnées, puis avec la norme.

2. Expliquer pourquoi $\vec{u}\cdot\vec{u}\geqslant 0$ pour tout vecteur $\vec{u}$, et dans quel cas $\vec{u}\cdot\vec{u}=0$.

   .....

   .....

   .....

3. Un vecteur $\vec{w}$ vérifie $\vec{w}\cdot\vec{w}=49$. Que vaut $\|\vec{w}\|$?

   .....

Exercice 4 *Orthogonalité* (1^{re}).

1. Les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

   .....

   .....

2. Même question pour $\vec{c}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$, puis pour $\vec{e}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{f}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

   .....

   .....

   .....

3. Déterminer le réel t pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\t\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

4. Donner les coordonnées d'un vecteur non nul orthogonal à $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, et vérifier.

Exercice 5 ***Calculer un angle*** **(*1re*).** Déterminer, au degré près, l'angle θ formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Compléter :
   $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = ... $\|\vec{u}\|$ = ... $\|\vec{v}\|$ = ... $\cos(\theta) = \dfrac{\text{.....}}{\text{.....}\times\text{.....}}$ = ... donc θ = ...
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 6 ***Problème en contexte : nature d'un triangle*** **(*1re*).** Dans un repère orthonormé, on donne A(1 ; 2), B(5 ; 3) et C(0 ; 6).

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\end{pmatrix}$

2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

   .....

3. En déduire la nature du triangle ABC.

   .....

   .....

4. Calculer les longueurs AB et AC. Préciser la nature du triangle.

5. En déduire, sans calcul, la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$, puis la retrouver à l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Exercice 7 *QCM* (*1re*). Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. Le produit scalaire $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \cdot \vec{v}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ vaut :

   A. 14 **B.** -10 **C.** $\begin{pmatrix}2\\-12\end{pmatrix}$ **D.** 10

2. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, alors :

   A. $\vec{u} = \vec{v}$ **B.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
   C. l'un des deux vecteurs est nul **D.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

3. Si $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et si l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mesure 60°, alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vaut :

   A. 3 **B.** 6 **C.** 5 **D.** $3\sqrt{3}$

4. La norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$ vaut :

A. -2 **B.** 14 **C.** 10 **D.** 100

Exercice 8 ***Vrai ou faux ?.*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Le produit scalaire de deux vecteurs est un vecteur.

B. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

C. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, alors l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est aigu.

D. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|$.

E. Deux vecteurs orthogonaux ont un produit scalaire nul.

F. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

G. La norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ vaut 2.

H. $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \cdot \vec{v}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} = 0$.