Les probabilités conditionnelles

Une probabilité conditionnelle mesure la chance qu'un événement se produise *sachant* qu'un autre est déjà réalisé. Cette information change la donne : la probabilité d'être malade n'est pas la même avant et après un test positif. L'outil central est l'arbre pondéré, qui organise les probabilités et permet de tout calculer : probabilité d'une intersection, probabilité totale, et probabilité « à rebours ». La difficulté est de ne pas confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$, qui n'ont aucune raison d'être égales.

Prérequis : Probabilités et statistiques, Fractions. **Pour s'entraîner :** Exercices : probabilités conditionnelles.

Propriété 1 (Probabilité conditionnelle, 1re)

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. La probabilité de B **sachant** A, notée $P_A(B)$, est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On en déduit la probabilité d'une intersection : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Exemple. On sait que $P(A) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Alors $P_A(B) = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$. Sachant que A est réalisé, B a une probabilité de 0,4.

Exercice 1 *Calculer une probabilité conditionnelle, étape par étape (1re)*

1. On donne $P(A) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. Compléter : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$
2. Dans une classe de 30 élèves, il y a 18 filles, dont 12 sont demi-pensionnaires, et 12 garçons, dont 4 sont demi-pensionnaires. On choisit un élève au hasard. On note F l'événement « l'élève est une fille » et D l'événement « l'élève est demi-pensionnaire ».

   a) Compléter le tableau à double entrée.

	D	$\overline{D}$	**Total**
F	12	…	18
$\overline{F}$	4	…	…
Total	…	…	30

b) Calculer $P(F)$, $P(D)$ et $P(F \cap D)$.

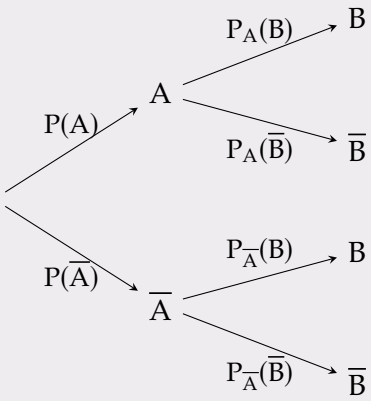
c) Calculer $P_F(D)$ et $P_D(F)$. Ces deux probabilités sont-elles égales ?

d) Traduire $P_D(F)$ par une phrase.

Propriété 2 (Arbre pondéré, 1re)

Un arbre pondéré organise une expérience à deux étapes. Sur chaque branche figure une probabilité ; les branches issues d'un même point ont une somme égale à 1. On lit deux règles :

- la probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités rencontrées le long de ce chemin ;
- la probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités des chemins qui y mènent.



Exercice 2 *Compléter un arbre pondéré (1re)* On donne $P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}6$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$.

1. Reproduire l'arbre pondéré et compléter les probabilités manquantes : $P(\overline{A})$, $P_A(\overline{B})$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.
2. Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. Vérifier que la somme de ces quatre probabilités vaut 1.

Propriété 3 (Formule des probabilités totales, 1re)

Avec l'arbre ci-dessus, l'événement B est atteint par deux chemins : celui qui passe par A et celui qui passe par $\overline{A}$. D'où

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B).$$

Exercice 3 *Probabilités totales (1^{re})*

1. Avec l'arbre de l'exercice précédent, calculer P(B), puis P($\overline{B}$) de deux façons différentes.
2. Dans une classe, 60 % des élèves sont des filles. Parmi les filles, 30 % jouent d'un instrument ; parmi les garçons, 20 %. On choisit un élève au hasard. On note F « l'élève est une fille » et I « l'élève joue d'un instrument ».
   a) Construire l'arbre pondéré.
   b) Calculer $P(F \cap I)$.
   c) Calculer P(I).
   d) L'élève choisi joue d'un instrument. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ? Arrondir au centième.

Propriété 4 (Indépendance, 1^{re})

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque la réalisation de l'un ne change pas la probabilité de l'autre, c'est-à-dire $P_A(B) = P(B)$. Cela équivaut à

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Méthode : utiliser un arbre

1. Traduire l'énoncé en événements et placer les probabilités connues sur les branches.
2. Compléter les branches manquantes (la somme partant d'un point vaut 1).
3. Multiplier le long des chemins, additionner les chemins menant au même événement.

Exemple. Une urne donne A avec P(A) = 0,3. Sachant A, B a pour probabilité 0,8 ; sachant $\overline{A}$, B a pour probabilité 0,5. Alors

$$P(B) = 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}24 + 0{,}35 = 0{,}59.$$

Exercice 4 *Indépendance (1^{re})*

1. On donne P(A) = 0,6, P(B) = 0,5 et $P(A \cap B) = 0{,}3$.
   a) Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
   b) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.
2. On lance un dé équilibré à six faces. On note A « le résultat est pair », B « le résultat est un multiple de 3 » et C « le résultat est supérieur ou égal à 4 ».
   a) Calculer P(A), P(B) et P(C).

b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

c) Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Exercice 5 *Problème en contexte : le test de contrôle (1^{re})* Dans une usine, 4 % des pièces sont défectueuses. Un test détecte 95 % des pièces défectueuses, mais signale aussi à tort 2 % des pièces conformes. On choisit une pièce au hasard et on note D « la pièce est défectueuse » et T « le test est positif ».

1. Construire l'arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le test soit positif.
3. Une pièce a un test positif. Calculer la probabilité qu'elle soit réellement défectueuse, $P_T(D)$, arrondie au centième. Commenter.
4. Une pièce a un test négatif. Calculer la probabilité qu'elle soit réellement conforme, $P_{\overline{T}}(\overline{D})$, arrondie au millième. Comparer avec la question précédente.

Exercice 6 *Problème en contexte : tirages sans remise (1^{re})* Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes, indiscernables au toucher. On tire une boule, on ne la remet pas dans l'urne, puis on tire une seconde boule. On note R_1 « la première boule est rouge », R_2 « la seconde boule est rouge », et V_1, V_2 les événements contraires.

1. Construire l'arbre pondéré en précisant chaque probabilité.
2. Calculer $P(R_1 \cap R_2)$.
3. Calculer $P(R_2)$.
4. Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ?
5. La seconde boule est rouge. Quelle est la probabilité que la première l'ait été aussi ?

⚠ Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$	« c'est la même chose »	$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, dénominateurs différents
Additionner le long d'un chemin	$P(A \cap B) = P(A) + P_A(B)$	on multiplie : $P(A) \times P_A(B)$
Oublier un chemin dans $P(B)$	$P(B) = P(A) \times P_A(B)$	ajouter le chemin par $\overline{A}$
Croire que deux événements sont toujours indépendants	supposer $P(A \cap B) = P(A)P(B)$	à vérifier, ce n'est pas automatique

Exercice 7 *QCM (1^{re})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. On donne $P(A) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Alors $P_A(B)$ vaut :

   A. 0,1 **B.** 2,5 **C.** 0,7 **D.** 0,4

2. Sur un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin s'obtient en :

   A. additionnant les probabilités des branches
   B. multipliant les probabilités des branches
   C. prenant la plus petite des probabilités
   D. soustrayant de 1 la probabilité de la dernière branche

3. Si $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$ et si A et B sont indépendants, alors $P(A \cap B)$ vaut :

   A. 0,15 **B.** 0,8 **C.** 0,2 **D.** 0,6

4. Les probabilités $P_A(B)$ et $P_B(A)$:

   A. sont toujours égales
   B. ont pour somme 1
   C. ont le même numérateur $P(A \cap B)$, mais des dénominateurs différents
   D. sont égales dès que A et B sont indépendants

Exercice 8 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Si $P(A) \neq 0$, alors $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

B. Sur un arbre pondéré, la somme des probabilités de toutes les branches de l'arbre vaut 1.

C. Si A et B sont indépendants, alors $P(A \cap B) = 0$.

D. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

E. $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.

F. Si $P_A(B) = 0{,}3$, alors $P_B(A) = 0{,}7$.

G. $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$.

H. Une probabilité conditionnelle peut être supérieure à 1.

*Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche **Que faire quand je bloque ?***
*Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche **Mémorisation et sciences cognitives**.*
*Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton **Carnet d'erreurs**.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$.

2.

a) On complète par différence : $18 - 12 = 6$ filles externes, $12 - 4 = 8$ garçons externes, $12 + 4 = 16$ demi-pensionnaires et $6 + 8 = 14$ externes.

	D	$\overline{\text{D}}$	**Total**
F	12	6	18
$\overline{\text{F}}$	4	8	12
Total	16	14	30

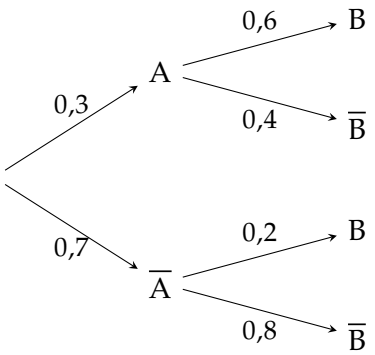
b) $P(F) = \dfrac{18}{30} = 0{,}6$; $P(D) = \dfrac{16}{30} = \dfrac{8}{15}$; $P(F \cap D) = \dfrac{12}{30} = 0{,}4$.

c) $P_F(D) = \dfrac{P(F \cap D)}{P(F)} = \dfrac{0{,}4}{0{,}6} = \dfrac{2}{3}$. On peut aussi lire directement dans la ligne des filles : $\dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$. $P_D(F) = \dfrac{P(F \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}4}{\frac{8}{15}} = 0{,}4 \times \dfrac{15}{8} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$. Lecture directe dans la colonne des demi-pensionnaires : $\dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$. Ces deux probabilités sont différentes : même numérateur $P(F \cap D)$, mais dénominateurs différents.

d) $P_D(F) = \dfrac{3}{4}$ signifie : « parmi les demi-pensionnaires, trois élèves sur quatre sont des filles », ou encore « sachant que l'élève choisi est demi-pensionnaire, la probabilité que ce soit une fille est 0,75 ».

Corrigé de l'exercice 2.

1. Les branches issues d'un même point ont une somme égale à 1 : $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$, $P_A(\overline{B}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.



2. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées :

- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$;

- $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$;
- $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$;
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$.

Vérification : $0{,}18 + 0{,}12 + 0{,}14 + 0{,}56 = 1$. ✓ Les quatre chemins recouvrent toutes les issues possibles.

Corrigé de l'exercice 3.

1. L'événement B est atteint par deux chemins : $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}18 + 0{,}14 = 0{,}32$. Première façon : $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}32 = 0{,}68$. Seconde façon, par les chemins : $P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}12 + 0{,}56 = 0{,}68$. ✓

2.

   a) L'arbre a deux branches principales F (probabilité 0,6) et $\overline{F}$ (probabilité 0,4). De F partent I (0,3) et $\overline{I}$ (0,7) ; de $\overline{F}$ partent I (0,2) et $\overline{I}$ (0,8).

   b) $P(F \cap I) = P(F) \times P_F(I) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$.

   c) $P(I) = P(F) \times P_F(I) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(I) = 0{,}18 + 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}18 + 0{,}08 = 0{,}26$.

   d) On cherche $P_I(F) = \dfrac{P(F \cap I)}{P(I)} = \dfrac{0{,}18}{0{,}26} \approx 0{,}69$. C'est une probabilité « à rebours » : on connaît le résultat de la seconde étape (l'élève joue d'un instrument) et on remonte à la première (est-ce une fille ?). Elle est différente de $P_F(I) = 0{,}3$.

Corrigé de l'exercice 4.

1.

   a) $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5$ et $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$.

   b) On compare $P(A) \times P(B) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$. Ils sont égaux, donc A et B sont **indépendants**. On remarque d'ailleurs que $P_A(B) = 0{,}5 = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B.

2.

   a) $A = \{2 ; 4 ; 6\}$, donc $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$; $B = \{3 ; 6\}$, donc $P(B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$; $C = \{4 ; 5 ; 6\}$, donc $P(C) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

   b) $A \cap B = \{6\}$, donc $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$. Or $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$. Les deux valeurs sont égales : A et B sont indépendants.

   c) $A \cap C = \{4 ; 6\}$, donc $P(A \cap C) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. Or $P(A) \times P(C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$. Comme $\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{1}{4}$, les événements A et C ne sont **pas** indépendants. Interprétation : $P_C(A) =$

$\dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{1/3}{1/2} = \dfrac{2}{3} > P(A)$; savoir que le résultat est au moins 4 augmente la probabilité qu'il soit pair.

Corrigé de l'exercice 5.

1. Les branches principales sont D (0,04) et $\overline{D}$ (0,96). De D partent T (0,95) et $\overline{T}$ (0,05) ; de $\overline{D}$ partent T (0,02) et $\overline{T}$ (0,98).
2. $P(T) = P(D) \times P_D(T) + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T) = 0{,}04 \times 0{,}95 + 0{,}96 \times 0{,}02 = 0{,}038 + 0{,}0192 = 0{,}0572$.
3. $P_T(D) = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}038}{0{,}0572} \approx 0{,}66$. Même avec un test positif, la pièce n'a qu'environ 66 % de chances d'être défectueuse : les fausses alertes sur les très nombreuses pièces conformes pèsent lourd. C'est pourquoi $P_T(D)$ et $P_D(T) = 0{,}95$ sont très différents.
4. $P(\overline{T}) = 1 - 0{,}0572 = 0{,}9428$ et $P(\overline{D} \cap \overline{T}) = 0{,}96 \times 0{,}98 = 0{,}9408$. Donc $P_{\overline{T}}(\overline{D}) = \dfrac{0{,}9408}{0{,}9428} \approx 0{,}998$. Un test négatif est donc très fiable (la pièce est presque sûrement conforme), alors qu'un test positif laisse un doute important.

Corrigé de l'exercice 6.

1. Au premier tirage, $P(R_1) = \dfrac{3}{5}$ et $P(V_1) = \dfrac{2}{5}$. Au second tirage, il ne reste que 4 boules : si la première était rouge, il reste 2 rouges et 2 vertes, donc $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $P_{R_1}(V_2) = \dfrac{1}{2}$; si la première était verte, il reste 3 rouges et 1 verte, donc $P_{V_1}(R_2) = \dfrac{3}{4}$ et $P_{V_1}(V_2) = \dfrac{1}{4}$.
2. $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{10}$.
3. $P(R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(V_1) \times P_{V_1}(R_2) = \dfrac{3}{10} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{5}$.
4. $P(R_1) \times P(R_2) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{25} = 0{,}36$, alors que $P(R_1 \cap R_2) = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$. Ces valeurs sont différentes : R_1 et R_2 ne sont pas indépendants. C'est cohérent : sans remise, la couleur de la première boule modifie le contenu de l'urne.
5. On cherche $P_{R_2}(R_1) = \dfrac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{3/10}{3/5} = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 7.

1. **Réponse D.** $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$.
   - A (0,1) : on a multiplié $0{,}5 \times 0{,}2$ au lieu de diviser.
   - B (2,5) : division dans le mauvais sens, $0{,}5 \div 0{,}2$; une probabilité ne peut pas dépasser 1.
   - C (0,7) : on a additionné les deux probabilités.
2. **Réponse B.** $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$: on multiplie le long d'un chemin.

- A : l'addition sert pour réunir plusieurs chemins menant au même événement, pas pour un chemin.
- C et D : ces règles n'existent pas.

3. **Réponse A.** Par indépendance, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15$.
   - B (0,8) : somme $0{,}3 + 0{,}5$, confusion avec une réunion d'événements incompatibles.
   - C (0,2) : différence $0{,}5 - 0{,}3$, sans signification ici.
   - D (0,6) : quotient $0{,}3 \div 0{,}5$, confusion avec une probabilité conditionnelle.
4. **Réponse C.** $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ et $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
   - A : elles ne sont égales que si $P(A) = P(B)$.
   - B : aucune raison ; c'est $P_A(B) + P_A(\overline{B})$ qui vaut 1.
   - D : l'indépendance donne $P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$, ce qui n'impose pas $P_A(B) = P_B(A)$.

Corrigé de l'exercice 8.

A. Vrai. C'est la définition de la probabilité de B sachant A.

B. Faux. La somme vaut 1 pour les branches *issues d'un même point*, pas pour toutes les branches de l'arbre. Sur un arbre à deux étapes avec deux branches par point, la somme de toutes les branches vaut 3.

C. Faux. Indépendants signifie $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Une intersection de probabilité nulle correspond à des événements *incompatibles*, ce qui est autre chose.

D. Vrai. C'est la formule qui découle de la définition : la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches.

E. Vrai. Sachant A, l'événement B est réalisé ou non : les deux branches issues de A ont une somme égale à 1.

F. Faux. Il n'y a aucun lien direct entre $P_A(B)$ et $P_B(A)$ sans connaître $P(A)$ et $P(B)$. Le nombre 0,7 est $P_A(\overline{B})$, pas $P_B(A)$.

G. Vrai. C'est la formule des probabilités totales : B est atteint soit par A, soit par $\overline{A}$.

H. Faux. Une probabilité conditionnelle est une probabilité, donc comprise entre 0 et 1. En effet $A \cap B$ est inclus dans A, donc $P(A \cap B) \leqslant P(A)$ et le quotient est au plus 1.