Les probabilités conditionnelles — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur les probabilités conditionnelles. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver la définition, les règles de l'arbre pondéré et la formule des probabilités totales. Dessine toujours l'arbre avant de calculer.

Exercice 1 ***Calculer une probabilité conditionnelle, étape par étape (1re).***

1. On donne $P(A) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. Compléter : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$

2. Dans une classe de 30 élèves, il y a 18 filles, dont 12 sont demi-pensionnaires, et 12 garçons, dont 4 sont demi-pensionnaires. On choisit un élève au hasard. On note F l'événement « l'élève est une fille » et D l'événement « l'élève est demi-pensionnaire ».

   a) Compléter le tableau à double entrée.

	D	$\overline{D}$	**Total**
F	12		18
$\overline{F}$	4		
Total			30

   b) Calculer P(F), P(D) et $P(F \cap D)$.
   $P(F) = \ldots\ldots$ $P(D) = \ldots\ldots$ $P(F \cap D) = \ldots\ldots$

   c) Calculer $P_F(D)$ et $P_D(F)$. Ces deux probabilités sont-elles égales ?

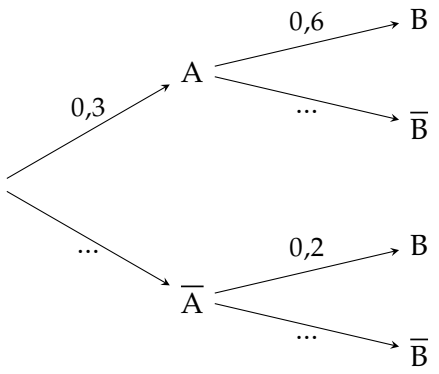
   d) Traduire $P_D(F)$ par une phrase.

   . . . . . .

   . . . . . .

Exercice 2 ***Compléter un arbre pondéré (1re).*** On donne $P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}6$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$.

1. Compléter les probabilités manquantes sur l'arbre : $P(\overline{A})$, $P_A(\overline{B})$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.



2. Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. Vérifier que la somme de ces quatre probabilités vaut 1.
   $P(A \cap B) =$ ..... $P(A \cap \overline{B}) =$ .....
   $P(\overline{A} \cap B) =$ ..... $P(\overline{A} \cap \overline{B}) =$ .....
   Vérification : .....

Exercice 3 ***Probabilités totales*** **(*1re*).**

1. Avec l'arbre de l'exercice précédent, calculer $P(B)$, puis $P(\overline{B})$ de deux façons différentes.

2. Dans une classe, 60 % des élèves sont des filles. Parmi les filles, 30 % jouent d'un instrument ; parmi les garçons, 20 %. On choisit un élève au hasard. On note F « l'élève est une fille » et I « l'élève joue d'un instrument ».
   a) Construire l'arbre pondéré.

   b) Calculer $P(F \cap I)$.

   . . . . . .

   c) Calculer $P(I)$.

   . . . . . .

   . . . . . .

d) L'élève choisi joue d'un instrument. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ? Arrondir au centième.

Exercice 4 ***Indépendance*** **(*1re*).**

1. On donne P(A) = 0,6, P(B) = 0,5 et P(A ∩ B) = 0,3.
   a) Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
   $P_A(B)$ = ...
   $P_B(A)$ = ...
   b) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

   .....

   .....

2. On lance un dé équilibré à six faces. On note A « le résultat est pair », B « le résultat est un multiple de 3 » et C « le résultat est supérieur ou égal à 4 ».
   a) Calculer P(A), P(B) et P(C).
   P(A) = ... P(B) = ... P(C) = ...
   b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

   c) Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Exercice 5 ***Problème en contexte : le test de contrôle*** **(*1re*).** Dans une usine, 4 % des pièces sont défectueuses. Un test détecte 95 % des pièces défectueuses, mais signale aussi à tort 2 % des pièces conformes. On choisit une pièce au hasard et on note D « la pièce est défectueuse » et T « le test est positif ».

1. Construire l'arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que le test soit positif.

3. Une pièce a un test positif. Calculer la probabilité qu'elle soit réellement défectueuse, $P_T(D)$, arrondie au centième. Commenter.

4. Une pièce a un test négatif. Calculer la probabilité qu'elle soit réellement conforme, $P_{\overline{T}}(\overline{D})$, arrondie au millième. Comparer avec la question précédente.

Exercice 6 ***Problème en contexte : tirages sans remise*** **(*1re*).** Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes, indiscernables au toucher. On tire une boule, on ne la remet pas dans l'urne, puis on tire une seconde boule. On note R_1 « la première boule est rouge », R_2 « la seconde boule est rouge », et V_1, V_2 les événements contraires.

1. Construire l'arbre pondéré en précisant chaque probabilité.

2. Calculer $P(R_1 \cap R_2)$.

   .....

3. Calculer $P(R_2)$.

   .....

   .....

4. Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ?

5. La seconde boule est rouge. Quelle est la probabilité que la première l'ait été aussi ?

Exercice 7 ***QCM (1re).*** Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. On donne $P(A) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Alors $P_A(B)$ vaut :

   A. 0,1 **B.** 2,5 **C.** 0,7 **D.** 0,4

2. Sur un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin s'obtient en :

   A. additionnant les probabilités des branches
   B. multipliant les probabilités des branches
   C. prenant la plus petite des probabilités
   D. soustrayant de 1 la probabilité de la dernière branche

3. Si $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$ et si A et B sont indépendants, alors $P(A \cap B)$ vaut :

   A. 0,15 **B.** 0,8 **C.** 0,2 **D.** 0,6

4. Les probabilités $P_A(B)$ et $P_B(A)$:

A. sont toujours égales

B. ont pour somme 1

C. ont le même numérateur $P(A \cap B)$, mais des dénominateurs différents

D. sont égales dès que A et B sont indépendants

Exercice 8 ***Vrai ou faux ?.*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Si $P(A) \neq 0$, alors $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

B. Sur un arbre pondéré, la somme des probabilités de toutes les branches de l'arbre vaut 1.

C. Si A et B sont indépendants, alors $P(A \cap B) = 0$.

D. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

E. $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.

F. Si $P_A(B) = 0{,}3$, alors $P_B(A) = 0{,}7$.

G. $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$.

H. Une probabilité conditionnelle peut être supérieure à 1.