Prérequis pour la spécialité maths de terminale

Cette fiche teste les acquis de première indispensables pour aborder la spécialité mathématiques de terminale sereinement. Essaie chaque exercice **sans ton cours**, note tes réponses au brouillon, puis consulte les solutions en fin de fiche. Si tu bloques, c'est le signe qu'il faut reprendre le point correspondant avant d'aller plus loin.

Réussi sans hésitation : passe au suivant. **Réussi avec hésitation** : fais deux exercices supplémentaires pour consolider. **Échoué** : retravaille la leçon correspondante avant de poursuivre.

① Second degré

1. Résoudre $2x^2 - 5x + 3 = 0$ à l'aide du discriminant.
2. Factoriser $2x^2 - 5x + 3$.
3. Étudier le signe de $-x^2 + 4x - 3$ sur $\mathbb{R}$.

② Fonctions de référence et variations

1. Préciser le sens de variation de la fonction carré sur $\mathbb{R}$, puis de la fonction inverse sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Résoudre $x^2 = 9$, puis l'inéquation $x^2 < 9$.
3. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)^2 + 1$. Donner son minimum, le réel en lequel il est atteint, puis son sens de variation.

③ Équations et inéquations

1. Résoudre l'équation produit $(x-3)(2x+1) = 0$.
2. Résoudre l'inéquation $-2x + 5 \geq 1$.
3. Étudier le signe de $(x+2)(4-x)$ suivant les valeurs de x.

④ Dérivation

1. Calculer la dérivée de $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 7$.
2. Calculer la dérivée de $g(x) = (2x+1)(x^2-3)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ pour $f(x) = x^3 - 3x$ et dresser le tableau de variations de f.

⑤ Suites

1. (u_n) est définie par $u_n = 3n - 7$. Calculer u_0, u_1, u_5. Quelle est la nature de cette suite ? Préciser ses éléments caractéristiques.
2. (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $q = 2$. Exprimer v_n en fonction de n et calculer v_6.
3. (w_n) est définie par $w_0 = 3$ et $w_{n+1} = 2w_n - 1$. Calculer w_1, w_2, w_3. La suite est-elle arithmétique ? géométrique ?

⑥ Pourcentages et évolutions

1. Un article coûtant 80 € augmente de 15 %. Calculer son nouveau prix.
2. Un prix passe de 50 € à 42 €. Déterminer le taux d'évolution, en pourcentage.
3. Un capital augmente de 10 % une année, puis baisse de 10 % l'année suivante. Quel est le taux d'évolution global ?

⑦ Fonction exponentielle

1. Simplifier $\mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-x}$.
2. Résoudre $\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^{5}$.
3. Résoudre $\mathrm{e}^{x} > 1$.

⑧ Fonctions trigonométriques

1. Donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
2. À quel angle, en degrés, correspond le réel $\frac{3\pi}{4}$? Dans quel quadrant du cercle trigonométrique se trouve son point image ?
3. Résoudre $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $[0\ ;\ 2\pi[$.

⑨ Probabilités conditionnelles

1. Dans une usine, 5 % des pièces sont défectueuses. Un test de contrôle détecte 90 % des pièces défectueuses, mais donne aussi une fausse alerte pour 3 % des pièces conformes. On choisit une pièce au hasard.
   a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
   b) Calculer la probabilité que le test soit positif.
2. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Sachant que la carte tirée est rouge, quelle est la probabilité que ce soit un as ?

⑩ Variables aléatoires

1. On lance un dé équilibré à six faces et on note X le numéro obtenu. Donner la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance E(X).

2. Une variable aléatoire X suit la loi : $P(X = 0) = 0{,}5$, $P(X = 1) = 0{,}3$, $P(X = 2) = 0{,}2$. Calculer E(X) et V(X).

11 Produit scalaire

1. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Les vecteurs sont-ils orthogonaux ?
2. Dans un triangle ABC avec AB = 5, AC = 4 et $\widehat{BAC} = 60°$, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

12 Géométrie repérée

1. Dans un repère orthonormé, on donne A(1 ; 2) et B(5 ; −1). Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, puis la distance AB.
2. On ajoute le point C(3 ; 5). Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ? Les points A, B, C sont-ils alignés ?
3. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [AB].

Solutions

1. Second degré

1. $a = 2, b = -5, c = 3$. $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{5-1}{4} = 1$ et $x_2 = \dfrac{5+1}{4} = \dfrac{3}{2}$.
   L'ensemble des solutions est $\left\{1 \ ; \ \dfrac{3}{2}\right\}$.
2. Comme $\Delta > 0$, $2x^2 - 5x + 3 = 2(x-1)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) = (x-1)(2x-3)$.
3. $a = -1, b = 4, c = -3$. $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-4-2}{-2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-4+2}{-2} = 1$.
   Comme $a = -1 < 0$, le trinôme est positif entre les racines :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Si tu échoues : reprends le discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$), les formules des racines, la factorisation $a(x - x_1)(x - x_2)$, et la règle du signe (même signe que a à l'extérieur des racines, signe contraire entre les racines). Fiche à revoir : Second degré.

2. Fonctions de référence et variations

1. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty \ ; \ 0]$ et croissante sur $[0 \ ; \ +\infty[$. La fonction inverse est décroissante sur $]0 \ ; \ +\infty[$.
2. $x^2 = 9 \iff x = -3$ ou $x = 3$.
   Pour l'inéquation, $x^2 < 9 \iff -3 < x < 3$: l'ensemble des solutions est $]-3 \ ; \ 3[$ (attention, ce n'est pas $x < 3$ seulement).
3. $f(x) = (x-2)^2 + 1$ est sous forme canonique. Un carré étant toujours positif ou nul, $f(x) \geq 1$, avec égalité lorsque $x - 2 = 0$, c'est-à-dire $x = 2$. Le minimum de f vaut donc 1, atteint en $x = 2$. La fonction f est décroissante sur $]-\infty \ ; \ 2]$ et croissante sur $[2 \ ; \ +\infty[$.

Si tu échoues : reprends les fonctions de référence (carré, inverse, racine carrée) et leurs variations, ainsi que la lecture d'un extremum sur la forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$. Fiche à revoir : Fonctions.

3. Équations et inéquations

1. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
   $(x-3)(2x+1) = 0 \iff x - 3 = 0$ ou $2x + 1 = 0 \iff x = 3$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$.
   L'ensemble des solutions est $\left\{-\dfrac{1}{2} \ ; \ 3\right\}$.
2. $-2x + 5 \geq 1 \iff -2x \geq -4 \iff x \leq 2$.
   On divise les deux membres par -2, qui est négatif, donc on change le sens de l'inégalité.
   L'ensemble des solutions est $]-\infty \ ; \ 2]$.
3. Le facteur $(x + 2)$ s'annule en -2, le facteur $(4 - x)$ s'annule en 4. On étudie le signe de chaque facteur, puis celui du produit, dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+2)(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le produit $(x+2)(4-x)$ est donc positif sur $[-2\ ;\ 4]$ et négatif à l'extérieur ; il s'annule en -2 et en 4.

Si tu échoues : reprends la résolution d'une équation produit nul, la règle du changement de sens d'une inégalité lors de la division par un nombre négatif, et l'étude du signe d'un produit facteur par facteur. Fiches à revoir : Équations, Second degré.

4. Dérivation

1. $f'(x) = 9x^2 - 4x + 1$.
2. On applique $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = 2x+1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x^2 - 3$, $v'(x) = 2x$.
   $g'(x) = 2(x^2-3) + (2x+1)(2x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$.
3. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	2	↘	-2	↗	

$f(-1) = -1 + 3 = 2$ et $f(1) = 1 - 3 = -2$.

Si tu échoues aux exercices 1 ou 2 : reprends les formules de dérivation $(x^n \to nx^{n-1})$ et la formule du produit. Si tu échoues à l'exercice 3 : reprends la méthode complète : dériver, factoriser la dérivée, dresser le tableau de signes avec les facteurs, puis le tableau de variations. Fiche à revoir : Dérivation.

5. Suites

1. $u_0 = -7$, $u_1 = -4$, $u_5 = 8$. On vérifie : $u_1 - u_0 = 3$, $u_5 - u_4 = 8 - 5 = 3$. La suite est arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -7$.
2. $v_n = v_0 \times q^n = 5 \times 2^n$. Donc $v_6 = 5 \times 2^6 = 5 \times 64 = 320$.
3. $w_1 = 2\times 3 - 1 = 5$, $w_2 = 2\times 5 - 1 = 9$, $w_3 = 2\times 9 - 1 = 17$.
   $w_1 - w_0 = 2$ et $w_2 - w_1 = 4$: la différence n'est pas constante, la suite n'est pas arithmétique.
   $\dfrac{w_1}{w_0} = \dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{w_2}{w_1} = \dfrac{9}{5}$: le quotient n'est pas constant, la suite n'est pas géométrique.

Si tu échoues : reprends les définitions et formules explicites des suites arithmétiques ($u_n = u_0 + nr$) et géométriques ($v_n = v_0 \times q^n$), ainsi que la différence entre formule explicite et formule de récurrence. Fiche à revoir : Suites numériques.

6. Pourcentages et évolutions

1. Augmenter de 15 % revient à multiplier par le coefficient $1 + \dfrac{15}{100} = 1{,}15$. Le nouveau prix est $80 \times 1{,}15 = 92$ €.
2. Le taux d'évolution est égal à la variation rapportée à la valeur initiale : $\dfrac{42-50}{50} = \dfrac{-8}{50} = -0{,}16$, soit une baisse de 16 %.
3. Multiplier par 1,10 puis par 0,90 revient à multiplier par le coefficient global $1{,}10 \times 0{,}90 = 0{,}99$. Le capital est donc multiplié par 0,99, ce qui correspond à une baisse de 1 % (et non à une évolution nulle).

Si tu échoues : reprends le coefficient multiplicateur ($1 + t$ pour une hausse, $1 - t$ pour une baisse), le calcul d'un taux d'évolution, et le fait que des évolutions successives se multiplient au lieu de s'additionner. Fiches à revoir : Proportionnalité, Suites numériques.

7. Fonction exponentielle

1. $\mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{3x+(-x)} = \mathrm{e}^{2x}$.
2. La fonction exponentielle est strictement croissante, donc $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$.
   $\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^5 \iff 2x - 1 = 5 \iff x = 3$.
3. $\mathrm{e}^x > 1 \iff \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 \iff x > 0$ (car la fonction exponentielle est strictement croissante).
   L'ensemble des solutions est $]0\ ;\ +\infty[$.

Si tu échoues : reprends les propriétés algébriques de l'exponentielle ($\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$) et le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante et toujours positive. Fiche à revoir : Fonction exponentielle.

8. Fonctions trigonométriques

1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.
2. $\dfrac{3\pi}{4}$ correspond à $\dfrac{3 \times 180°}{4} = 135°$. Son point image se trouve dans le deuxième quadrant (en haut à gauche), symétrique du point image de $\dfrac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe des ordonnées.
3. Sur $[0\ ;\ 2\pi[$, $\cos x = \dfrac{1}{2} \iff x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$.

Si tu échoues : reprends le cercle trigonométrique, les valeurs remarquables ($\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$) et la conversion entre radians et degrés.

9. Probabilités conditionnelles

1. Soit D l'événement « la pièce est défectueuse » et T l'événement « le test est positif ».
   On a : $\mathrm{P}(\mathrm{D}) = 0{,}05$, $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{D}}) = 0{,}95$, $\mathrm{P}_{\mathrm{D}}(\mathrm{T}) = 0{,}90$, $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{T}) = 0{,}03$.

a) L'arbre pondéré a deux branches principales (D et $\overline{\text{D}}$), chacune se subdivisant en T et $\overline{\text{T}}$.
b) D'après la formule des probabilités totales :
$\text{P(T)} = \text{P(D)} \times \text{P}_{\text{D}}\text{(T)} + \text{P}(\overline{\text{D}}) \times \text{P}_{\overline{\text{D}}}\text{(T)} = 0{,}05 \times 0{,}90 + 0{,}95 \times 0{,}03 = 0{,}045 + 0{,}0285 = 0{,}0735$.

2. Un jeu de 32 cartes contient 16 cartes rouges, dont 2 as (as de cœur et as de carreau).
$\text{P}_{\text{R}}(\text{as}) = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$.

Si tu échoues : reprends les arbres pondérés (chaque branche porte une probabilité conditionnelle, le produit des branches donne la probabilité de l'intersection) et la formule des probabilités totales. Fiche à revoir : Probabilités conditionnelles.

10. Variables aléatoires

1. X prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, chacune avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$.
$\text{E(X)} = \dfrac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \dfrac{21}{6} = 3{,}5$.
2. $\text{E(X)} = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}2 = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$.
On calcule d'abord $\text{E}(\text{X}^2) = 0^2 \times 0{,}5 + 1^2 \times 0{,}3 + 2^2 \times 0{,}2 = 0{,}3 + 0{,}8 = 1{,}1$.
Puis $\text{V(X)} = \text{E}(\text{X}^2) - \text{E(X)}^2 = 1{,}1 - 0{,}7^2 = 1{,}1 - 0{,}49 = 0{,}61$.

Si tu échoues : reprends la loi de probabilité d'une variable aléatoire (la somme des probabilités vaut 1), l'espérance $\text{E(X)} = \sum x_i \, \text{P(X} = x_i)$ et la variance $\text{V(X)} = \text{E}(\text{X}^2) - \text{E(X)}^2$. Fiche à revoir : Variables aléatoires.

11. Produit scalaire

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-1) \times 5 = 6 - 5 = 1$.
$\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, donc les vecteurs ne sont **pas** orthogonaux.
2. $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = \text{AB} \times \text{AC} \times \cos(\widehat{\text{BAC}}) = 5 \times 4 \times \cos(60°) = 20 \times \dfrac{1}{2} = 10$.

Si tu échoues : reprends les deux formules du produit scalaire : avec les coordonnées ($xx' + yy'$) et avec les normes et l'angle ($\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$). Retiens que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Fiche à revoir : Produit scalaire.

12. Géométrie repérée

1. $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_{\text{B}} - x_{\text{A}} \\ y_{\text{B}} - y_{\text{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.
$\text{AB} = \sqrt{(x_{\text{B}} - x_{\text{A}})^2 + (y_{\text{B}} - y_{\text{A}})^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.
2. $\overrightarrow{\text{AC}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.
Ici, $4 \times 3 - (-3) \times 2 = 12 + 6 = 18 \neq 0$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B, C ne sont pas alignés.
3. I a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_{\text{A}} + x_{\text{B}}}{2} \; ; \; \dfrac{y_{\text{A}} + y_{\text{B}}}{2} \right) = \left(\dfrac{1+5}{2} \; ; \; \dfrac{2+(-1)}{2} \right) = \left(3 \; ; \; \dfrac{1}{2} \right)$.

Si tu échoues : reprends les coordonnées d'un vecteur $(x_B - x_A$ *et* $y_B - y_A)$*, la distance entre deux points, le critère de colinéarité* $(xy' - yx' = 0)$ *et les coordonnées du milieu d'un segment. Fiches à revoir : Repérage, Produit scalaire.*