Prérequis pour la spé maths de première

Cette fiche teste les acquis de seconde indispensables pour aborder la spécialité mathématiques de première sereinement. Essaie chaque exercice **sans ton cours**, note tes réponses au brouillon, puis consulte les solutions en fin de fiche. Si tu bloques, c'est le signe qu'il faut reprendre le point correspondant avant d'aller plus loin.

Réussi sans hésitation : passe au suivant. **Réussi avec hésitation** : fais deux exercices supplémentaires pour consolider. **Échoué** : retravaille la leçon correspondante avant de poursuivre.

① Calcul d'images et notation fonctionnelle

1. Soit $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Calculer $f(-1)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Soit $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$. Calculer $g(0)$ et $g(5)$.
3. Déterminer la (ou les) valeur(s) interdite(s) de g.

② Fonctions affines et lecture graphique

1. Déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite passant par A(1 ; 4) et B(3 ; −2).
2. On donne $h(x) = -\dfrac{3}{2}x + 5$. Résoudre $h(x) = 0$, puis déterminer le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Une fonction f est représentée par une courbe. On lit graphiquement que f est croissante sur $[-3\ ;\ 1]$ et décroissante sur $[1\ ;\ 5]$, avec $f(1) = 4$. Que peut-on dire de $f(1)$?

③ Identités remarquables

1. Développer $(3x + 2)^2$.
2. Factoriser $x^2 - 16$.
3. Factoriser $9x^2 + 12x + 4$.

④ Inéquations du premier degré

1. Résoudre $-3x + 6 > 0$.
2. Résoudre $4 - 2x \leqslant 3x + 9$.

⑤ Tableau de signes et équation produit nul

1. Dresser le tableau de signes de $P(x) = (2x - 6)(x + 1)$.
2. Résoudre $(2x - 1)(x + 3) = 0$.
3. Résoudre $(2x - 6)(x + 1) \geqslant 0$ à l'aide du tableau de signes de la question 1.

⑥ Vecteurs et repérage

1. Dans un repère, on donne A(2 ; −1) et B(5 ; 3). Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et la distance AB.
2. Calculer les coordonnées du milieu M de [AB].
3. On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

⑦ Probabilités

1. On lance deux dés équilibrés à six faces et on additionne les résultats. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 7 ?
2. Dans un lycée, on choisit un élève au hasard. On sait que 60 % des élèves pratiquent un sport, 40 % jouent d'un instrument et 15 % font les deux. Quelle est la probabilité qu'un élève choisi au hasard ne fasse ni sport ni musique ?

⑧ Calcul littéral et équations

1. Développer et réduire $(2x - 3)(x + 4)$.
2. Factoriser $5x^2 - 10x$.
3. Résoudre l'équation $3(x - 2) = 5x + 4$.

⑨ Puissances et racines carrées

1. Calculer $2^3 \times 2^4$ et $\dfrac{5^6}{5^2}$.
2. Écrire $\dfrac{1}{x^3}$ à l'aide d'un exposant négatif, puis simplifier $(x^2)^3$.
3. Simplifier $\sqrt{50}$, puis calculer $\sqrt{9 \times 16}$.

⑩ Proportionnalité et pourcentages

1. Un véhicule parcourt 150 km en 2 h à vitesse constante. Quelle distance parcourt-il en 5 h ?
2. Calculer 30 % de 80.
3. Une population passe de 2500 à 2800 habitants. Quel est le pourcentage d'augmentation ?

11 Géométrie : Pythagore, Thalès, trigonométrie

1. Le triangle ABC est rectangle en A avec AB = 3 et AC = 4. Calculer BC.
2. Dans un triangle rectangle, l'angle aigu α vérifie $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Donner une valeur approchée de α au degré près.
3. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles, avec A, M, B alignés et A, N, C alignés. On donne AM = 2, AB = 6 et AN = 3. Calculer AC.

12 Statistiques

1. On considère la série 5, 8, 8, 11, 18. Calculer la moyenne et la médiane.
2. Déterminer l'étendue de cette série.
3. Des notes sont réparties ainsi : trois élèves ont 8, cinq élèves ont 12, deux élèves ont 16. Calculer la moyenne de la classe.

13 Intervalles et ensembles de nombres

1. Traduire par un intervalle l'ensemble des réels x tels que $-2 \leqslant x < 5$.
2. Déterminer l'intersection $[-3\ ;\ 4] \cap [0\ ;\ 7]$.
3. À quels ensembles parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ appartiennent $-\frac{3}{4}$ et $\sqrt{2}$?

Solutions

1. Calcul d'images et notation fonctionnelle

1. $f(-1) = 2\times(-1)^2 - 3\times(-1) + 1 = 2 + 3 + 1 = 6$.
   $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\times\dfrac{1}{4} - 3\times\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} + 1 = 0$.
2. $g(0) = \dfrac{2\times 0 + 1}{0 - 3} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$.
   $g(5) = \dfrac{2\times 5 + 1}{5 - 3} = \dfrac{11}{2}$.
3. Le dénominateur s'annule quand $x - 3 = 0$, soit $x = 3$. La valeur interdite est 3.

Si tu échoues : reprends le calcul d'images (remplacer x par la valeur, respecter les priorités). Pour les fonctions rationnelles, pense toujours à vérifier que le dénominateur ne s'annule pas. Fiche à revoir : Fonctions.

2. Fonctions affines et lecture graphique

1. Le coefficient directeur est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2 - 4}{3 - 1} = \dfrac{-6}{2} = -3$.
   L'équation est $y = -3x + b$. En remplaçant par $A(1\ ;\ 4)$: $4 = -3\times 1 + b$, donc $b = 7$.
   L'ordonnée à l'origine est 7. L'équation de la droite est $y = -3x + 7$.
2. $h(x) = 0 \iff -\dfrac{3}{2}x + 5 = 0 \iff x = \dfrac{10}{3}$.
   Comme le coefficient directeur est négatif, h est décroissante : $h(x) > 0$ pour $x < \dfrac{10}{3}$ et $h(x) < 0$ pour $x > \dfrac{10}{3}$.
3. f est croissante puis décroissante autour de $x = 1$: $f(1) = 4$ est le maximum de f sur $[-3\ ;\ 5]$.

Si tu échoues : reprends la formule du coefficient directeur, l'équation de droite $y = mx + p$, et la lecture de variations sur un graphique (croissante = monte de gauche à droite). Fiche à revoir : Fonctions.

3. Identités remarquables

1. $(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2\times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$.
2. $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x - 4)(x + 4)$.
3. On reconnaît $(3x)^2 + 2\times 3x \times 2 + 2^2 = (3x + 2)^2$.

Si tu échoues : reprends les trois identités remarquables : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Entraîne-toi à les reconnaître dans les deux sens. Fiche à revoir : Calcul littéral.

4. Inéquations du premier degré

1. $-3x + 6 > 0 \iff -3x > -6 \iff x < 2$ (on divise par $-3 < 0$: on **inverse le sens**).
   L'ensemble des solutions est $]-\infty\ ;\ 2[$.
2. $4 - 2x \leqslant 3x + 9 \iff -5x \leqslant 5 \iff x \geqslant -1$ (on divise par $-5 < 0$: on **inverse le sens**).
   L'ensemble des solutions est $[-1\ ;\ +\infty[$.

Si tu échoues : reprends la règle fondamentale : quand on multiplie ou divise par un nombre négatif, on inverse le sens de l'inégalité.

5. Tableau de signes et équation produit nul

1. $2x - 6 = 0 \iff x = 3$ et $x + 1 = 0 \iff x = -1$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$2x - 6$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
   $2x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$ ou $x + 3 = 0 \iff x = -3$.
   L'ensemble des solutions est $\left\{-3 \ ; \ \dfrac{1}{2}\right\}$.
3. D'après le tableau, $P(x) \geqslant 0$ pour $x \in]-\infty \ ; \ -1] \cup [3 \ ; \ +\infty[$.

Si tu échoues : reprends la règle des signes d'un produit (un produit est positif quand les deux facteurs ont le même signe) et la propriété du produit nul.

6. Vecteurs et repérage

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.
2. M a pour coordonnées $\left(\dfrac{2+5}{2} \ ; \ \dfrac{-1+3}{2}\right) = \left(\dfrac{7}{2} \ ; \ 1\right)$.
3. On calcule $3 \times 4 - (-2) \times (-6) = 12 - 12 = 0$. Le déterminant est nul, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
   On vérifie : $\vec{v} = -2\vec{u}$.

Si tu échoues : reprends les formules de coordonnées d'un vecteur $(x_B - x_A \ ; \ y_B - y_A)$, de distance $(\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2})$, de milieu, et le critère de colinéarité par le déterminant. Fiche à revoir : Repérage.

7. Probabilités

1. L'univers contient $6 \times 6 = 36$ issues équiprobables. Les couples donnant une somme de 7 sont : $(1 \ ; \ 6)$, $(2 \ ; \ 5)$, $(3 \ ; \ 4)$, $(4 \ ; \ 3)$, $(5 \ ; \ 2)$, $(6 \ ; \ 1)$, soit 6 issues.
   $P(\text{somme} = 7) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.
2. Soit S l'événement « pratique un sport » et M l'événement « joue d'un instrument ».
   $P(S \cup M) = P(S) + P(M) - P(S \cap M) = 0{,}60 + 0{,}40 - 0{,}15 = 0{,}85$.
   $P(\overline{S \cup M}) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$. La probabilité est 0,15 (soit 15 %).

Si tu échoues : reprends le modèle d'équiprobabilité, le dénombrement par tableau à double entrée, et la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Fiche à revoir : Probabilités et statistiques.

8. Calcul littéral et équations

1. $(2x-3)(x+4) = 2x^2 + 8x - 3x - 12 = 2x^2 + 5x - 12$.
2. Le facteur commun est $5x$: $5x^2 - 10x = 5x(x-2)$.
3. $3(x-2) = 5x + 4 \iff 3x - 6 = 5x + 4 \iff -2x = 10 \iff x = -5$.

Si tu échoues : reprends la double distributivité, la factorisation par facteur commun et la résolution d'une équation du premier degré. Fiches à revoir : Calcul littéral, Équations.

9. Puissances et racines carrées

1. $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$ et $\dfrac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4 = 625$.
2. $\dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$ et $(x^2)^3 = x^{2\times 3} = x^6$.
3. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ et $\sqrt{9 \times 16} = \sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$.

Si tu échoues : reprends les règles des puissances ($a^m \times a^n = a^{m+n}$, $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$) et la simplification d'une racine carrée. Fiche à revoir : Puissances.

10. Proportionnalité et pourcentages

1. La vitesse est $\dfrac{150}{2} = 75$ km/h. En 5 h, la distance parcourue est $75 \times 5 = 375$ km.
2. 30 % de $80 = 0{,}30 \times 80 = 24$.
3. Le taux d'augmentation est $\dfrac{2800 - 2500}{2500} = \dfrac{300}{2500} = 0{,}12$, soit 12 %.

Si tu échoues : reprends la proportionnalité (coefficient, produit en croix), le calcul d'un pourcentage d'une quantité et le taux d'évolution. Fiche à revoir : Proportionnalité.

11. Géométrie : Pythagore, Thalès, trigonométrie

1. D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, donc $BC = 5$.
2. $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{5}\right) \approx 37°$, à l'aide de la touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice.
3. D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, soit $\dfrac{2}{6} = \dfrac{3}{AC}$. Donc $AC = \dfrac{3 \times 6}{2} = 9$.

Si tu échoues : reprends le théorème de Pythagore, les définitions du cosinus, du sinus et de la tangente dans le triangle rectangle, et le théorème de Thalès (égalité des rapports). Fiches à revoir : Théorème de Pythagore, Théorème de Thalès, Trigonométrie.

12. Statistiques

1. Moyenne : $\dfrac{5 + 8 + 8 + 11 + 18}{5} = \dfrac{50}{5} = 10$. La série ordonnée comporte cinq valeurs ; la médiane est la troisième, soit 8.
2. Étendue : $18 - 5 = 13$.
3. Moyenne pondérée : $\dfrac{8 \times 3 + 12 \times 5 + 16 \times 2}{3 + 5 + 2} = \dfrac{24 + 60 + 32}{10} = \dfrac{116}{10} = 11{,}6$.

Si tu échoues : reprends la moyenne (simple et pondérée par les effectifs), la médiane (valeur centrale d'une série ordonnée) et l'étendue. Fiche à revoir : Probabilités et statistiques.

13. Intervalles et ensembles de nombres

1. $-2 \leqslant x < 5$ se traduit par l'intervalle $[-2\ ;\ 5[$.
2. $[-3\ ;\ 4] \cap [0\ ;\ 7] = [0\ ;\ 4]$.
3. $-\dfrac{3}{4}$ appartient à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{R}$ (rationnel non entier). $\sqrt{2}$ appartient à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{Q}$ (irrationnel).

Si tu échoues : reprends les notations d'intervalles (crochets ouverts ou fermés), l'intersection et la réunion, et les ensembles de nombres $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.