Prérequis pour les maths complémentaires de terminale

Cette fiche teste les acquis de première indispensables pour suivre l'option mathématiques complémentaires en terminale. L'accent est mis sur l'étude des fonctions, la dérivation, l'exponentielle, les suites et les évolutions, ainsi que les probabilités et les statistiques. Essaie chaque exercice **sans ton cours**, note tes réponses au brouillon, puis consulte les solutions en fin de fiche.

Réussi sans hésitation : passe au suivant. **Réussi avec hésitation** : fais deux exercices supplémentaires pour consolider. **Échoué** : retravaille la leçon correspondante avant de poursuivre.

① Fonctions : images, antécédents, variations

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Calculer $f(0)$ et $f(3)$.
2. Déterminer les antécédents de 1 par f, c'est-à-dire résoudre $f(x) = 1$.
3. La fonction g est croissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$ puis décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$. Admet-elle un maximum ou un minimum ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

② Dérivation et variations

1. Calculer la dérivée de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$.
2. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

③ Fonction exponentielle

1. Simplifier $\dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{\mathrm{e}^{2x}}$.
2. Résoudre $\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}^{3}$.
3. Donner le sens de variation de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ et le signe de e^{x} sur $\mathbb{R}$.

④ Suites et évolutions

1. (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $r = -5$. Calculer u_1 et u_{10}.
2. Une population de 2000 habitants augmente de 3 % par an. Par quel coefficient la multiplie-t-on chaque année ? Quelle est la population au bout d'un an ?
3. Cette évolution se modélise par une suite géométrique. Donner sa raison et l'expression de P_n, population au bout de n années.

⑤ Probabilités conditionnelles

1. Dans une population, 40 % des personnes font du sport. Parmi les sportifs, 70 % mangent équilibré ; parmi les non-sportifs, seulement 30 %. On choisit une personne au hasard.
   a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
   b) Calculer la probabilité que la personne fasse du sport et mange équilibré.
   c) Calculer la probabilité que la personne mange équilibré.
2. On sait que $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Calculer $P_A(B)$.

⑥ Statistiques

1. On considère la série de notes 4, 7, 7, 9, 13. Calculer la moyenne et la médiane.
2. Déterminer l'étendue de cette série.
3. Dans une classe, la moyenne de 20 élèves est 11 et celle de 10 autres élèves est 14. Calculer la moyenne de l'ensemble des 30 élèves.

Solutions

1. Fonctions : images, antécédents, variations

1. $f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$ et $f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$.
2. $f(x) = 1 \iff x^2 - 4x + 1 = 1 \iff x^2 - 4x = 0 \iff x(x-4) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 4$.
   Les antécédents de 1 par f sont donc 0 et 4.
3. La fonction g croît puis décroît : elle admet un **maximum**, atteint en $x = 1$.

Si tu échoues : reprends le calcul d'une image (on remplace x par la valeur), la recherche d'un antécédent (on résout une équation) et la lecture d'un extremum dans un tableau de variations. Fiche à revoir : Fonctions.

2. Dérivation et variations

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x$.
2. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est $f'(1) = 3 - 12 = -9$.
3. $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$, qui s'annule en 0 et en 4. Le facteur $3x$ est négatif avant 0 et positif après ; le facteur $(x-4)$ est négatif avant 4 et positif après.
   On en déduit le signe de f' et les variations de f (avec $f(0) = 5$ et $f(4) = -27$) :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-27	↗	$+\infty$

Si tu échoues : reprends les formules de dérivation, l'interprétation de $f'(a)$ comme coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a, et le lien entre le signe de f' et les variations de f. Fiche à revoir : Dérivation.

3. Fonction exponentielle

1. $\dfrac{e^{5x}}{e^{2x}} = e^{5x-2x} = e^{3x}$.
2. La fonction exponentielle est strictement croissante, donc $e^{x+1} = e^3 \iff x + 1 = 3 \iff x = 2$.
3. La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $e^x > 0$ pour tout réel x.

Si tu échoues : reprends les propriétés algébriques de l'exponentielle ($\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$), sa stricte croissance et le fait qu'elle est toujours strictement positive. Fiche à revoir : Fonction exponentielle.

4. Suites et évolutions

1. $u_1 = u_0 + r = 100 - 5 = 95$ et $u_{10} = u_0 + 10r = 100 + 10 \times (-5) = 50$.

2. Augmenter de 3 % revient à multiplier par le coefficient $1 + \dfrac{3}{100} = 1{,}03$. Au bout d'un an, la population est $2000 \times 1{,}03 = 2060$ habitants.
3. Chaque année, la population est multipliée par 1,03 : la suite est géométrique de raison $q = 1{,}03$ et de premier terme $P_0 = 2000$. Donc $P_n = 2000 \times 1{,}03^n$.

Si tu échoues : reprends les suites arithmétiques ($u_n = u_0 + nr$) et géométriques ($u_n = u_0 \times q^n$), ainsi que le lien entre une évolution en pourcentage et le coefficient multiplicateur. Fiches à revoir : Suites numériques, Proportionnalité.

5. Probabilités conditionnelles

1. Soit S l'événement « la personne fait du sport » et E l'événement « la personne mange équilibré ».
   On a : $P(S) = 0{,}4$, $P(\overline{S}) = 0{,}6$, $P_S(E) = 0{,}7$, $P_{\overline{S}}(E) = 0{,}3$.
   a) L'arbre pondéré comporte deux branches principales (S et $\overline{S}$), chacune se subdivisant en E et $\overline{E}$.
   b) $P(S \cap E) = P(S) \times P_S(E) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$.
   c) D'après la formule des probabilités totales :
   $P(E) = P(S) \times P_S(E) + P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(E) = 0{,}28 + 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}28 + 0{,}18 = 0{,}46$.
2. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$.

Si tu échoues : reprends les arbres pondérés, la probabilité d'une intersection (produit le long d'une branche), la formule des probabilités totales et la formule de la probabilité conditionnelle $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. *Fiche à revoir : Probabilités conditionnelles.*

6. Statistiques

1. Moyenne : $\dfrac{4 + 7 + 7 + 9 + 13}{5} = \dfrac{40}{5} = 8$. La série ordonnée comporte cinq valeurs ; la médiane est la troisième, soit 7.
2. Étendue : $13 - 4 = 9$.
3. Moyenne pondérée : $\dfrac{20 \times 11 + 10 \times 14}{20 + 10} = \dfrac{220 + 140}{30} = \dfrac{360}{30} = 12$.

Si tu échoues : reprends le calcul de la moyenne (somme des valeurs divisée par l'effectif), la médiane (valeur qui partage la série ordonnée en deux groupes de même effectif), l'étendue (valeur maximale moins valeur minimale) et la moyenne pondérée. Fiche à revoir : Probabilités et statistiques.