La loi binomiale

On lance dix fois un dé : combien de fois obtient-on un six ? On répond au hasard à un questionnaire de vingt questions : combien de bonnes réponses ? Dans les deux cas, on répète une même expérience à deux issues, succès ou échec, un nombre fixé de fois et de façon indépendante, puis on compte les succès. Le nombre de succès suit une **loi binomiale**, entièrement déterminée par deux paramètres : le nombre n de répétitions et la probabilité p de succès. Les **coefficients binomiaux** comptent les façons de placer les succès parmi les répétitions ; l'espérance np donne le nombre moyen de succès attendu. La difficulté principale est de vérifier les conditions du modèle (deux issues, indépendance, même probabilité) avant d'appliquer la formule.

Prérequis : Probabilités conditionnelles, Variables aléatoires, Fonction logarithme. **Pour s'entraîner :** Exercices : loi binomiale.

Propriété 1 (Épreuve et schéma de Bernoulli, T^le)

Épreuve de Bernoulli : expérience aléatoire à **deux issues**, appelées succès (probabilité p) et échec (probabilité $1-p$).

Loi de Bernoulli : la variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon suit la loi de Bernoulli de paramètre p : $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$, $E(X)=p$ et $V(X)=p(1-p)$.

Schéma de Bernoulli : répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques** (même p) et **indépendantes** (le résultat d'une épreuve n'influence pas les autres). On le représente par un arbre à n niveaux, chaque nœud ayant deux branches.

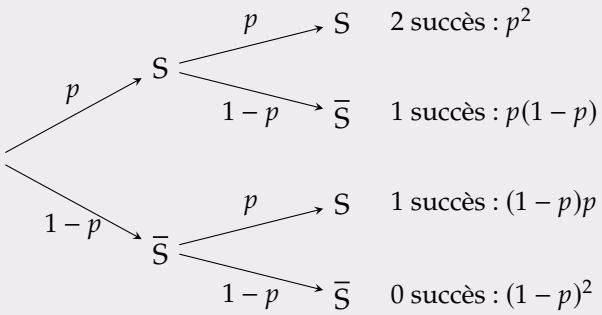


Schéma de Bernoulli à $n=2$ épreuves : deux chemins mènent à exactement un succès, d'où $P(\text{un succès}) = 2p(1-p)$.

Exercice 1 *Reconnaître une épreuve et un schéma de Bernoulli* (T^{le}) Pour chaque situation, dire s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli ou d'un schéma de Bernoulli ; le cas échéant, préciser le succès, p et n. Sinon, expliquer pourquoi.

1. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes et l'on regarde si c'est un as.
2. On tire une carte, on la remet, on mélange, et l'on répète cinq fois en comptant les as obtenus.
3. On tire cinq cartes d'un coup et l'on compte les as.
4. On lance un dé et l'on note le numéro obtenu.
5. On répond au hasard à un questionnaire de 10 questions ayant chacune 4 réponses possibles dont une seule est juste, et l'on compte les bonnes réponses.

Propriété 2 (Coefficients binomiaux, T^{le})

Le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ (lire « k parmi n ») est le nombre de chemins de l'arbre à n épreuves qui comportent exactement k succès. C'est aussi le nombre de façons de choisir k objets parmi n, sans ordre.

Formule : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$, où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ (et $0! = 1$).

Valeurs simples : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (choisir k succès revient à choisir $n-k$ échecs).

Relation de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$: chaque nombre du triangle est la somme des deux nombres au-dessus de lui.

$n \backslash k$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

La calculatrice donne directement $\binom{n}{k}$ (touche « combinaison » ou `nCr`).

Exercice 2 *Calculer des coefficients binomiaux, étape par étape (T^le)*

1. Compléter : $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!\,\ldots!} = \dfrac{\ldots}{2\times\ldots} = \ldots$ Retrouver ce nombre dans le triangle de Pascal.
2. Donner sans calcul : $\binom{8}{0}$, $\binom{7}{1}$, $\binom{6}{6}$ et $\binom{10}{9}$.
3. Calculer $\binom{6}{3}$ avec la formule, puis $\binom{10}{8}$ en utilisant la symétrie.
4. Vérifier la relation de Pascal avec $\binom{6}{2} + \binom{6}{3}$.

Propriété 3 (Loi binomiale, T^le)

Dans un schéma de Bernoulli à n épreuves et de probabilité de succès p, la variable aléatoire X qui compte le **nombre de succès** suit la **loi binomiale** de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$. Pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Pourquoi : un chemin de l'arbre avec k succès et $n-k$ échecs a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ (produit le long du chemin), et il y a $\binom{n}{k}$ chemins de ce type.

Espérance : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np$, le nombre moyen de succès sur un grand nombre de séries.
Variance et écart-type : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = np(1-p)$ et $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{np(1-p)}$.
Calculatrice : elle donne $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant k)$. Pour les autres événements : $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant k) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant k-1)$ et $\mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant b) - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant a-1)$.

Méthode : résoudre un problème avec la loi binomiale

1. Vérifier les conditions : deux issues, n répétitions identiques et indépendantes.
2. Écrire « X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ » en précisant ce que compte X.
3. Traduire l'événement avec X (« au moins un » devient $\mathrm{X} \geqslant 1$, « au plus deux » devient $\mathrm{X} \leqslant 2$).
4. Calculer avec la formule ou la calculatrice, en passant par le complémentaire si besoin.

Exemple. On lance un dé équilibré 4 fois et X compte les six obtenus : X suit $\mathcal{B}\left(4\ ;\ \dfrac{1}{6}\right)$. Alors

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 6 \times \frac{1}{36} \times \frac{25}{36} = \frac{150}{1296} \approx 0{,}116.$$

Exercice 3 *Calculer une probabilité binomiale, étape par étape* (T^{le}) On lance un dé équilibré 4 fois et l'on note X le nombre de six obtenus.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Compléter : $P(X = 1) = \binom{4}{\ldots}\left(\frac{1}{6}\right)^{\ldots}\left(\frac{5}{6}\right)^{\ldots} = \ldots \times \frac{1}{6} \times \frac{125}{216} = \frac{\ldots}{1296} \approx \ldots$
3. Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 4)$ (valeurs exactes et arrondies au millième).
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un six.

Exercice 4 *Loi binomiale et calculatrice* (T^{le}) Un questionnaire comporte 10 questions, chacune avec 4 réponses proposées dont une seule est juste. Un élève répond au hasard à toutes les questions. On note X le nombre de bonnes réponses.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer $P(X = 3)$ avec la formule (arrondir au millième), puis vérifier à la calculatrice.
3. Calculer $P(X \leqslant 2)$, puis $P(X \geqslant 5)$ (arrondir au millième).
4. Calculer E(X) et l'interpréter.

Exercice 5 *Espérance et écart-type* (T^{le})

1. X suit $\mathcal{B}(50\ ;\ 0{,}2)$. Calculer E(X), V(X) et $\sigma(X)$ (arrondir au centième).
2. Une pièce truquée donne « pile » avec la probabilité 0,6. On la lance 20 fois et Y compte les « pile ». Calculer E(Y) et $\sigma(Y)$.
3. Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(30\ ;\ p)$ d'espérance 6. Déterminer p.
4. Interpréter $E(X) = 10$ à la question 1 par une phrase.

Exercice 6 *Problème en contexte : contrôle de qualité* (T^{le}) Une machine produit des pièces dont 3 % sont défectueuses. On prélève 20 pièces au hasard dans une production très importante, ce qui permet d'assimiler le prélèvement à un tirage avec remise. On note X le nombre de pièces défectueuses du prélèvement.

1. Justifier que X suit $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}03)$.
2. Calculer la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse (arrondir au millième).
3. Calculer la probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse.
4. Le lot est refusé s'il contient au moins deux pièces défectueuses. Calculer la probabilité de refus.
5. Calculer E(X) et interpréter.

Exercice 7 *Problème en contexte : combien de tentatives ?* (T^{le}) Un basketteur réussit un lancer franc avec la probabilité 0,4, indépendamment des autres lancers. Il effectue n lancers et X compte les lancers réussis.

1. Donner la loi de X et exprimer $P(X \geqslant 1)$ en fonction de n.
2. Combien de lancers doit-il effectuer au minimum pour que la probabilité de réussir au moins un lancer dépasse 0,99 ? Résoudre l'inéquation à l'aide du logarithme, puis vérifier avec les puissances de 0,6.

⚠ Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Oublier le coefficient binomial	$P(X = 2) = p^2(1-p)^{n-2}$	multiplier par $\binom{n}{2}$: il y a plusieurs chemins
Confondre « au moins » et « exactement »	$P(X \geqslant 1) = P(X = 1)$	$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$
Confondre $\leqslant$ et $<$	$P(X < 3) = P(X \leqslant 3)$	$P(X < 3) = P(X \leqslant 2)$ pour une variable entière
Appliquer la loi binomiale sans remise	tirer 5 boules sans remise : « $\mathcal{B}(5\ ;\ p)$ »	sans remise, les tirages ne sont pas indépendants : pas de loi binomiale (sauf approximation pour une grande population)
Confondre $\binom{n}{k}$ et n^k	$\binom{5}{2} = 25$	$\binom{5}{2} = 10$: nombre de choix de 2 objets parmi 5

Exercice 8 *QCM* (T^{le}) Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. $\binom{5}{2}$ vaut :

   A. 20 **B.** 25 **C.** 5 **D.** 10

2. X suit $\mathcal{B}(6\ ;\ 0{,}5)$. Alors $P(X = 6)$ vaut :

   A. 0,5 **B.** $6 \times 0{,}5$ **C.** $0{,}5^6$ **D.** $\frac{1}{6}$

3. X suit $\mathcal{B}(40\ ;\ 0{,}25)$. Alors E(X) vaut :

   A. 10 **B.** 30 **C.** 0,25 **D.** 7,5

4. Dans un schéma de Bernoulli, les épreuves doivent être :

A. toutes différentes
B. identiques et indépendantes
C. au nombre de deux exactement
D. de probabilité de succès 0,5

Exercice 9 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Une épreuve de Bernoulli a exactement deux issues.

B. Si X suit $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$, alors $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np$.

C. Pour tous entiers $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

D. Si X suit une loi binomiale, alors $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 1) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1)$.

E. Tirer successivement 5 boules sans remise dans une urne et compter les boules rouges définit un schéma de Bernoulli.

F. $\binom{n}{0} = 0$.

G. Si X suit $\mathcal{B}(10\ ;\ 0{,}3)$, alors $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 10) = 0{,}3^{10}$.

H. Si X suit $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$, alors $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = np$.

Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche ***Que faire quand je bloque ?***
Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche ***Mémorisation et sciences cognitives****.*
Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton ***Carnet d'erreurs****.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. Épreuve de Bernoulli : succès « obtenir un as », $p = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.
2. Schéma de Bernoulli : la remise et le mélange rendent les cinq tirages identiques et indépendants ; $n = 5$, $p = \frac{1}{8}$.
3. Ce n'est pas un schéma de Bernoulli : sans remise, la composition du jeu change à chaque carte, les tirages ne sont ni identiques ni indépendants.
4. Ce n'est pas une épreuve de Bernoulli : il y a six issues, pas deux. (Elle le devient si l'on définit un succès, par exemple « obtenir un six », avec $p = \frac{1}{6}$.)
5. Schéma de Bernoulli : chaque question est une épreuve à deux issues (bonne ou mauvaise réponse), $p = \frac{1}{4}$, les réponses au hasard sont indépendantes, $n = 10$.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{120}{2 \times 6} = 10$. C'est le troisième nombre de la ligne $n = 5$ du triangle : 1, 5, **10**, 10, 5, 1.
2. $\binom{8}{0} = 1$; $\binom{7}{1} = 7$; $\binom{6}{6} = 1$; $\binom{10}{9} = \binom{10}{1} = 10$.
3. $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{720}{6 \times 6} = 20$. Par symétrie, $\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$.
4. $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 15 + 20 = 35$, et $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{5040}{6 \times 24} = 35$. ✓

Corrigé de l'exercice 3.

1. Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli (succès « obtenir un six », $p = \frac{1}{6}$) ; les 4 lancers sont identiques et indépendants. Donc X suit $\mathcal{B}\left(4\ ;\ \frac{1}{6}\right)$.
2. $\mathrm{P}(X = 1) = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4 \times \frac{1}{6} \times \frac{125}{216} = \frac{500}{1296} \approx 0{,}386$.
3. $\mathrm{P}(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \approx 0{,}482$ et $\mathrm{P}(X = 4) = \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1296} \approx 0{,}001$.
4. « Au moins un six » est l'événement $X \geqslant 1$, contraire de $X = 0$: $\mathrm{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0{,}518$.

Corrigé de l'exercice 4.

1. Dix épreuves identiques et indépendantes, succès « bonne réponse » de probabilité $\frac{1}{4}$: X suit $\mathcal{B}(10\ ;\ 0{,}25)$.
2. $P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0{,}25^3 \times 0{,}75^7 = 120 \times 0{,}015625 \times 0{,}75^7 \approx 0{,}250$.
3. $P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0{,}056 + 0{,}188 + 0{,}282 \approx 0{,}526$. Pour $P(X \geqslant 5)$, on passe par le complémentaire : $P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 4) \approx 1 - 0{,}922 \approx 0{,}078$. Répondre au hasard donne moins d'une chance sur douze d'avoir la moyenne.
4. $E(X) = 10 \times 0{,}25 = 2{,}5$: en répondant au hasard, on obtient en moyenne 2,5 bonnes réponses sur 10.

Corrigé de l'exercice 5.

1. $E(X) = 50 \times 0{,}2 = 10$; $V(X) = 50 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 8$; $\sigma(X) = \sqrt{8} \approx 2{,}83$.
2. $E(Y) = 20 \times 0{,}6 = 12$; $V(Y) = 20 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 4{,}8$; $\sigma(Y) = \sqrt{4{,}8} \approx 2{,}19$.
3. $E(Z) = 30p = 6$, donc $p = \frac{6}{30} = 0{,}2$.
4. Si l'on répète un très grand nombre de fois la série de 50 épreuves, le nombre de succès par série est en moyenne proche de 10 ; l'écart-type d'environ 2,8 indique que la plupart des séries donnent entre 7 et 13 succès.

Corrigé de l'exercice 6.

1. Chaque pièce prélevée est défectueuse (succès, $p = 0{,}03$) ou non ; les 20 prélèvements sont assimilés à des épreuves identiques et indépendantes. Donc X suit $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}03)$.
2. $P(X = 0) = 0{,}97^{20} \approx 0{,}544$.
3. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0{,}544 = 0{,}456$.
4. $P(X = 1) = \binom{20}{1} \times 0{,}03 \times 0{,}97^{19} = 20 \times 0{,}03 \times 0{,}97^{19} \approx 0{,}336$. Donc $P(X \leqslant 1) \approx 0{,}544 + 0{,}336 = 0{,}880$ et $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}120$: environ un lot sur huit est refusé.
5. $E(X) = 20 \times 0{,}03 = 0{,}6$: un prélèvement de 20 pièces contient en moyenne 0,6 pièce défectueuse, soit environ 3 pièces défectueuses pour 5 prélèvements.

Corrigé de l'exercice 7.

1. X suit $\mathcal{B}(n\ ;\ 0{,}4)$ et $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}6^n$.
2. $1 - 0{,}6^n > 0{,}99 \iff 0{,}6^n < 0{,}01 \iff n \ln 0{,}6 < \ln 0{,}01 \iff n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}6} \approx 9{,}0$, en changeant le sens car $\ln 0{,}6 < 0$. Comme $\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}6} \approx 9{,}015$ n'est pas entier, le premier entier qui convient est $n = 10$. Vérification : $0{,}6^9 \approx 0{,}0101 > 0{,}01$ et $0{,}6^{10} \approx 0{,}0060 < 0{,}01$. Il faut au moins 10 lancers.

Corrigé de l'exercice 8.

1. **Réponse D.** $\binom{5}{2} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$.
   - A : 5×4 compte les choix ordonnés ; il faut diviser par 2 car l'ordre ne compte pas.
   - B : 5^2, confusion avec une puissance.
   - C : c'est $\binom{5}{1}$.
2. **Réponse C.** Six succès sur six lancers : un seul chemin, de probabilité $0{,}5^6 = \dfrac{1}{64}$.
   - A : probabilité d'un seul succès, pas de six.
   - B : $6 \times 0{,}5 = 3$ est l'espérance, pas une probabilité.
   - D : aucune raison.
3. **Réponse A.** $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np = 40 \times 0{,}25 = 10$.
   - B : $n(1-p) = 30$ est le nombre moyen d'échecs.
   - C : p est une probabilité, pas une espérance.
   - D : $np(1-p) = 7{,}5$ est la variance.
4. **Réponse B.** Identiques (même p) et indépendantes : ce sont les deux conditions du modèle.
   - A : au contraire, elles sont identiques.
   - C : n est quelconque ; c'est le nombre d'issues de chaque épreuve qui vaut 2.
   - D : p est quelconque entre 0 et 1.

Corrigé de l'exercice 9.

A. Vrai. C'est la définition : succès ou échec, rien d'autre.

B. Vrai. Chaque épreuve apporte en moyenne p succès ; n épreuves en apportent np.

C. Vrai. Choisir les k places des succès revient à choisir les $n-k$ places des échecs. Par exemple $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$.

D. Faux. $\mathrm{X} \geqslant 1$ regroupe $\mathrm{X} = 1$, $\mathrm{X} = 2$, …, $\mathrm{X} = n$. On calcule $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0)$.

E. Faux. Sans remise, la composition de l'urne change après chaque tirage : les épreuves ne sont ni identiques ni indépendantes.

F. Faux. $\binom{n}{0} = 1$: il y a une seule façon de ne choisir aucun objet (et un seul chemin sans aucun succès).

G. Vrai. $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 10) = \binom{10}{10} \times 0{,}3^{10} \times 0{,}7^0 = 0{,}3^{10}$: dix succès sur dix, un seul chemin.

H. Faux. V(X) = $np(1-p)$; np est l'espérance. Pour $\mathcal{B}(10\ ;\ 0{,}5)$: E(X) = 5 et V(X) = 2,5.