La loi binomiale — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur la loi binomiale. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver les conditions du schéma de Bernoulli, le triangle de Pascal, la formule $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$ *et l'espérance. Commence toujours par vérifier les conditions du modèle et par écrire la loi de* X*.*

Exercice 1 ***Reconnaître une épreuve et un schéma de Bernoulli*** **(*T^le*).** Pour chaque situation, dire s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli ou d'un schéma de Bernoulli ; le cas échéant, préciser le succès, p et n. Sinon, expliquer pourquoi.

1. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes et l'on regarde si c'est un as.

   . . . . . .

   . . . . . .

2. On tire une carte, on la remet, on mélange, et l'on répète cinq fois en comptant les as obtenus.

   . . . . . .

   . . . . . .

3. On tire cinq cartes d'un coup et l'on compte les as.

   . . . . . .

   . . . . . .

4. On lance un dé et l'on note le numéro obtenu.

   . . . . . .

   . . . . . .

5. On répond au hasard à un questionnaire de 10 questions ayant chacune 4 réponses possibles dont une seule est juste, et l'on compte les bonnes réponses.

   . . . . . .

   . . . . . .

Exercice 2 ***Calculer des coefficients binomiaux, étape par étape*** **(*T^le*).**

1. Compléter : $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!\,\ldots\ldots!} = \dfrac{\ldots\ldots}{2 \times \ldots\ldots} = \ldots\ldots$ Retrouver ce nombre dans le triangle de Pascal.
2. Donner sans calcul : $\binom{8}{0} = \ldots\ldots$ $\binom{7}{1} = \ldots\ldots$ $\binom{6}{6} = \ldots\ldots$ $\binom{10}{9} = \ldots\ldots$

3. Calculer $\binom{6}{3}$ avec la formule, puis $\binom{10}{8}$ en utilisant la symétrie.

4. Vérifier la relation de Pascal avec $\binom{6}{2} + \binom{6}{3}$.

.....

.....

Exercice 3 ***Calculer une probabilité binomiale, étape par étape*** **(*T^le*).** On lance un dé équilibré 4 fois et l'on note X le nombre de six obtenus.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

.....

.....

.....

2. Compléter : $P(X = 1) = \binom{4}{\ldots\ldots}\left(\frac{1}{6}\right)^{\ldots\ldots}\left(\frac{5}{6}\right)^{\ldots\ldots} = \ldots\ldots \times \frac{1}{6} \times \frac{125}{216} = \frac{\ldots\ldots}{1296} \approx \ldots\ldots$

3. Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 4)$ (valeurs exactes et arrondies au millième).

4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un six.

Exercice 4 ***Loi binomiale et calculatrice*** **(*T^le*).** Un questionnaire comporte 10 questions, chacune avec 4 réponses proposées dont une seule est juste. Un élève répond au hasard à toutes les questions. On note X le nombre de bonnes réponses.

1. Donner la loi de X.

.....

.....

2. Calculer P(X = 3) avec la formule (arrondir au millième), puis vérifier à la calculatrice.

3. Calculer P(X ⩽ 2), puis P(X ⩾ 5) (arrondir au millième).

4. Calculer E(X) et l'interpréter.

. . . . . .

. . . . . .

Exercice 5 ***Espérance et écart-type*** **(*T^le^*).**

1. X suit $\mathcal{B}(50\ ;\ 0{,}2)$. Calculer E(X), V(X) et σ(X) (arrondir au centième).
   E(X) = ... V(X) = ... σ(X) = ...

2. Une pièce truquée donne « pile » avec la probabilité 0,6. On la lance 20 fois et Y compte les « pile ». Calculer E(Y) et σ(Y).
   E(Y) = ... σ(Y) = ...

3. Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(30\ ;\ p)$ d'espérance 6. Déterminer p.

. . . . . .

. . . . . .

4. Interpréter E(X) = 10 à la question 1 par une phrase.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Exercice 6 ***Problème en contexte : contrôle de qualité*** **(*T^le^*).** Une machine produit des pièces dont 3 % sont défectueuses. On prélève 20 pièces au hasard dans une production très importante, ce qui permet d'assimiler le prélèvement à un tirage avec remise. On note X le nombre de pièces défectueuses du prélèvement.

1. Justifier que X suit $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}03)$.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

2. Calculer la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse (arrondir au millième).

. . . . . .

. . . . . .

3. Calculer la probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse.

. . . . . .

. . . . . .

4. Le lot est refusé s'il contient au moins deux pièces défectueuses. Calculer la probabilité de refus.

5. Calculer E(X) et interpréter.

. . . . . .

. . . . . .

Exercice 7 ***Problème en contexte : combien de tentatives ?*** **(*T*^{le}).** Un basketteur réussit un lancer franc avec la probabilité 0,4, indépendamment des autres lancers. Il effectue n lancers et X compte les lancers réussis.

1. Donner la loi de X et exprimer $P(X \geqslant 1)$ en fonction de n.

. . . . . .

. . . . . .

2. Combien de lancers doit-il effectuer au minimum pour que la probabilité de réussir au moins un lancer dépasse 0,99 ? Résoudre l'inéquation à l'aide du logarithme, puis vérifier avec les puissances de 0,6.

Exercice 8 *QCM* (T^{le})**.** Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. $\binom{5}{2}$ vaut :

   A. 20 **B.** 25 **C.** 5 **D.** 10

2. X suit $\mathcal{B}(6\ ;\ 0{,}5)$. Alors P(X = 6) vaut :

   A. 0,5 **B.** $6 \times 0{,}5$ **C.** $0{,}5^6$ **D.** $\frac{1}{6}$

3. X suit $\mathcal{B}(40\ ;\ 0{,}25)$. Alors E(X) vaut :

   A. 10 **B.** 30 **C.** 0,25 **D.** 7,5

4. Dans un schéma de Bernoulli, les épreuves doivent être :

   A. toutes différentes **B.** identiques et indépendantes
   C. au nombre de deux exactement **D.** de probabilité de succès 0,5

Exercice 9 *Vrai ou faux ?***.** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Une épreuve de Bernoulli a exactement deux issues.

B. Si X suit $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$, alors $E(X) = np$.

C. Pour tous entiers $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

D. Si X suit une loi binomiale, alors $P(X \geqslant 1) = P(X = 1)$.

E. Tirer successivement 5 boules sans remise dans une urne et compter les boules rouges définit un schéma de Bernoulli.

F. $\binom{n}{0} = 0$.

G. Si X suit $\mathcal{B}(10\ ;\ 0{,}3)$, alors $P(X = 10) = 0{,}3^{10}$.

H. Si X suit $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$, alors V(X) = np.