La fonction logarithme népérien

L'exponentielle transforme les sommes en produits : $e^{a+b} = e^a \times e^b$. Le **logarithme népérien** fait le chemin inverse : il transforme les produits en sommes, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. C'est la fonction réciproque de l'exponentielle : $\ln x$ est l'exposant qu'il faut donner à e pour obtenir x. Elle sert d'abord à résoudre les équations où l'inconnue est en exposant, comme $1{,}04^n \geqslant 1{,}5$, ce qui donne directement le nombre d'années nécessaires à un placement pour atteindre un seuil. La difficulté principale est de respecter les conditions d'existence (on ne prend le logarithme que d'un nombre strictement positif) et de ne pas inventer de règle pour $\ln(a+b)$.

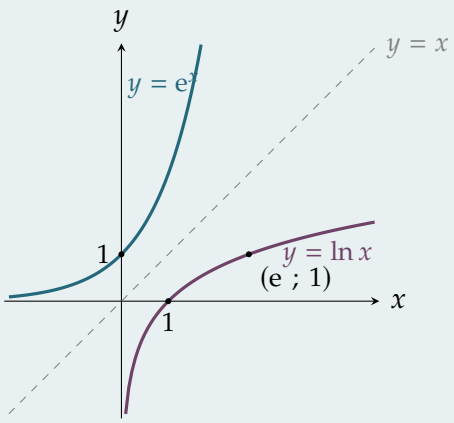
Prérequis : Fonction exponentielle, Dérivation, Limites de fonctions. **Pour s'entraîner :** Exercices : fonction logarithme.

Définition 1 (Tle)

Pour tout réel $x > 0$, l'équation $e^y = x$ admet une unique solution y : on l'appelle le **logarithme népérien** de x, noté $\ln x$. Ainsi, pour $x > 0$ et y réel,

$$\ln x = y \iff x = e^y$$

Valeurs clés : $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1$) et $\ln e = 1$ (car $e^1 = e$).
Réciprocité : $e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$, et $\ln(e^y) = y$ pour tout réel y.
Signe : $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$, $\ln x > 0$ si $x > 1$.
Sens de variation : la fonction ln est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.



Les courbes de ln et de exp sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Exercice 1 *Comprendre la définition, étape par étape (T^{le})*

1. Compléter : $\ln 1 = \ldots$; $\ln \mathrm{e} = \ldots$; $\mathrm{e}^{\ln 5} = \ldots$; $\ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right) = \ldots$; $\ln\left(\mathrm{e}^{2}\right) + \ln 1 = \ldots$
2. Résoudre $\mathrm{e}^{x} = 7$, puis $\ln x = 2$ (valeur exacte, puis arrondi au centième).
3. Sans calculatrice, donner le signe de $\ln 0{,}5$, de $\ln 3$ et de $\ln 1$. Ranger dans l'ordre croissant $\ln 0{,}5$, $\ln 3$, $\ln 1$, $\ln 2$.

Propriété 1 (Propriétés algébriques, T^{le})

Pour tous réels $a > 0$, $b > 0$ et tout entier n :

Propriété	Formule
Produit	$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
Quotient	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
Inverse	$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
Puissance	$\ln\left(a^{n}\right) = n \ln a$
Racine carrée	$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

Ces règles découlent de celles de l'exponentielle : $\mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = \mathrm{e}^{\ln a} \times \mathrm{e}^{\ln b} = ab$, donc $\ln a + \ln b = \ln(ab)$. Il n'existe **aucune** règle simple pour $\ln(a + b)$.

Exemples **A.** $\ln 8 = \ln\left(2^{3}\right) = 3\ln 2$. **B.** $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$. **C.** $\ln\left(\frac{2}{9}\right) = \ln 2 - \ln 9 = \ln 2 - 2\ln 3$.
D. $\mathrm{e}^{2\ln 3} = \mathrm{e}^{\ln 9} = 9$. **E.** $\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{5}}{\mathrm{e}^{2}}\right) = 5 - 2 = 3$.

Exercice 2 *Calculer avec les propriétés (T^{le})*

1. Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

   a) $A = \ln 12$ b) $B = \ln\left(\frac{8}{9}\right)$ c) $C = \ln\sqrt{6}$

   d) $D = \ln\left(\frac{1}{16}\right)$ e) $E = \ln 6 - \ln 3$ f) $F = \ln 4 - 2\ln 2$

2. Simplifier : $G = \mathrm{e}^{3\ln 2}$; $H = \ln\left(\mathrm{e}^{4}\right) - \ln(\mathrm{e})$; $I = \ln\left(\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{2}\right)$ pour x réel.

Propriété 2 (Équations et inéquations, T^le)

Comme ln est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln a = \ln b \iff a = b \qquad \text{et} \qquad \ln a < \ln b \iff a < b.$$

Inconnue en exposant : $e^x = k$ (avec $k > 0$) a pour solution $x = \ln k$; $q^n = k$ se résout en prenant le logarithme : $n \ln q = \ln k$.
Inconnue dans le logarithme : $\ln x = k$ a pour solution $x = e^k$.
Condition d'existence : avant de résoudre, on écrit l'ensemble des x pour lesquels tous les logarithmes sont définis, et l'on rejette les solutions qui n'y sont pas.

Méthode : résoudre $q^n \leqslant k$ ou $q^n \geqslant k$

1. Prendre le logarithme des deux membres (positifs) : $n \ln q \leqslant \ln k$.
2. Diviser par $\ln q$ en surveillant son signe : si $0 < q < 1$, $\ln q < 0$ et l'inégalité change de sens.
3. Conclure avec un entier : n est le premier entier qui vérifie l'inégalité obtenue.

Exemple. À partir de quel rang $0{,}8^n < 0{,}01$? On prend le logarithme : $n \ln 0{,}8 < \ln 0{,}01$. Comme $\ln 0{,}8 < 0$, on divise en changeant le sens : $n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \approx 20{,}6$. Le premier entier qui convient est $n = 21$. Vérification : $0{,}8^{20} \approx 0{,}0115$ et $0{,}8^{21} \approx 0{,}0092$.

Exercice 3 *Résoudre des équations et des inéquations (T^{le})* Résoudre dans $\mathbb{R}$, en précisant d'abord la condition d'existence.

a) $\ln x = 3$
b) $\ln(2x - 1) = \ln(x + 4)$
c) $e^{2x} = 5$
d) $\ln x \leqslant 1$
e) $3e^x - 6 = 0$
f) $\ln x + \ln(x - 3) = \ln 4$

Exercice 4 *Seuil d'une suite géométrique, étape par étape (T^{le})*

1. Un médicament s'élimine de 25 % par heure : $m_n = 200 \times 0{,}75^n$ (en mg). On cherche le premier rang tel que $m_n < 1$. Compléter : $m_n < 1 \iff 0{,}75^n < \ldots \iff n \ln 0{,}75 \ \ldots \ \ln(\ldots) \iff n \ \ldots \ \dfrac{\ln(\ldots)}{\ln 0{,}75} \approx \ldots$, car $\ln 0{,}75 \ \ldots \ 0$. Le premier rang est $n = \ldots$
2. Un capital de 2000 € placé à 4 % par an vaut $C_n = 2000 \times 1{,}04^n$ au bout de n années. Au bout de combien d'années dépasse-t-il 3000 € ?

Propriété 3 (Dérivée, variations et limites, T^le)

Dérivée : la fonction ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. Comme $\dfrac{1}{x} > 0$, ln est strictement croissante.

Fonction composée : si u est dérivable et strictement positive, $\big(\ln u\big)' = \dfrac{u'}{u}$.

Limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ (l'axe des ordonnées est asymptote verticale) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ (mais très lentement).

Croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$: toute puissance de x l'emporte sur le logarithme.

x	0		1		$+\infty$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	‖	$+$	0	$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Exemple. Dériver $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$: on pose $u = x^2+1 > 0$, $u' = 2x$, donc $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Exercice 5 *Dériver avec le logarithme (T^le)* Dériver chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = 3\ln x - x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

b) $g(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ sur $\mathbb{R}$

c) $h(x) = x\ln x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

d) $k(x) = \ln(2x+5)$ sur $\left]-\dfrac{5}{2}\ ;\ +\infty\right[$

e) $m(x) = (\ln x)^2$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

f) $n(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

Exercice 6 *Étudier une fonction avec le logarithme (T^le)* Soit $f(x) = x\ln x$, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et résoudre $f'(x) > 0$.
3. Dresser le tableau de variations de f et préciser son minimum (valeur exacte, puis arrondie au centième).
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

Exercice 7 *Problème en contexte : temps de doublement (T^{le})* Un capital C_0 est placé à 3 % par an, les intérêts s'ajoutant chaque année au capital. On note $C_n = C_0 \times 1{,}03^n$ le capital au bout de n années.

1. Montrer que $C_n \geqslant 2C_0$ équivaut à $n \ln 1{,}03 \geqslant \ln 2$.
2. En déduire le nombre d'années nécessaire pour que le capital double.
3. Pour un taux annuel t quelconque, justifier que le temps de doublement est le premier entier supérieur ou égal à $\dfrac{\ln 2}{\ln(1+t)}$. Le calculer pour $t = 6\,\%$.
4. Les banquiers utilisent la « règle des 70 » : le temps de doublement vaut environ $\dfrac{70}{\text{taux en pourcentage}}$. Comparer avec les résultats précédents.

Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Inventer une règle pour la somme	$\ln(a+b) = \ln a + \ln b$	aucune règle : $\ln(1+1) = \ln 2 \neq 0+0$
Oublier la condition d'existence	résoudre $\ln(x-2) = 0$ sans condition	écrire $x > 2$ d'abord, puis $x - 2 = 1$, $x = 3$
Diviser par $\ln q < 0$ sans changer le sens	$n \ln 0{,}8 < \ln 0{,}01 \Rightarrow n < \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$	$\ln 0{,}8 < 0$, donc $n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$
Confondre $\ln x = 0$ et $x = 0$	« $\ln x = 0$ donc $x = 0$ »	$\ln x = 0 \iff x = 1$; $\ln 0$ n'existe pas
Mal dériver $\ln u$	$\big(\ln(2x+5)\big)' = \dfrac{1}{2x+5}$	$\dfrac{u'}{u} = \dfrac{2}{2x+5}$: ne pas oublier u'

Exercice 8 *QCM (T^{le})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. $\ln\left(e^3\right)$ est égal à :

   A. 3e **B.** e^3 **C.** 3 **D.** $\dfrac{1}{3}$

2. $\ln 12 - \ln 3$ est égal à :

   A. $\ln 9$ **B.** $\ln 4$ **C.** $\ln 36$ **D.** 4

3. L'équation $e^x = -2$:

   A. a pour solution $x = \ln(-2)$ **B.** a pour solution $x = -\ln 2$
   C. a pour solution $x = \ln 2$ **D.** n'a aucune solution

4. La dérivée de $x \mapsto \ln(3x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ est :

A. $\dfrac{1}{x}$ **B.** $\dfrac{1}{3x}$ **C.** $\dfrac{3}{x}$ **D.** $\ln 3$

Exercice 9 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

B. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$.

C. Si $0 < x < 1$, alors $\ln x < 0$.

D. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}$.

E. Pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

F. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.

G. La courbe de la fonction ln admet l'axe des ordonnées pour asymptote.

H. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = +\infty$.

*Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche **Que faire quand je bloque ?***
*Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche **Mémorisation et sciences cognitives**.*
*Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton **Carnet d'erreurs**.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $e^{\ln 5} = 5$; $\ln\left(e^{-3}\right) = -3$; $\ln\left(e^2\right) + \ln 1 = 2 + 0 = 2$.
2. $e^x = 7 \iff x = \ln 7 \approx 1{,}95$. $\ln x = 2 \iff x = e^2 \approx 7{,}39$.
3. $0{,}5 < 1$ donc $\ln 0{,}5 < 0$; $3 > 1$ donc $\ln 3 > 0$; $\ln 1 = 0$. Comme ln est croissante et $0{,}5 < 1 < 2 < 3$: $\ln 0{,}5 < \ln 1 < \ln 2 < \ln 3$.

Corrigé de l'exercice 2.

1.

   a) $A = \ln(4 \times 3) = \ln\left(2^2\right) + \ln 3 = 2\ln 2 + \ln 3$.

   b) $B = \ln 8 - \ln 9 = 3\ln 2 - 2\ln 3$.

   c) $C = \dfrac{1}{2}\ln 6 = \dfrac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3)$.

   d) $D = -\ln 16 = -\ln\left(2^4\right) = -4\ln 2$.

   e) $E = \ln\left(\dfrac{6}{3}\right) = \ln 2$.

   f) $F = \ln\left(2^2\right) - 2\ln 2 = 2\ln 2 - 2\ln 2 = 0$.

2. $G = e^{\ln(2^3)} = e^{\ln 8} = 8$. $H = 4 - 1 = 3$. $I = \ln\left(e^{x+2}\right) = x + 2$.

Corrigé de l'exercice 3.

1. Condition : $x > 0$. $\ln x = 3 \iff x = e^3$. $S = \left\{e^3\right\}$ (environ 20,09).
2. Conditions : $2x - 1 > 0$ et $x + 4 > 0$, soit $x > \dfrac{1}{2}$. Alors $\ln(2x-1) = \ln(x+4) \iff 2x - 1 = x + 4 \iff x = 5$, qui vérifie $x > \dfrac{1}{2}$. $S = \{5\}$.
3. Pas de condition. $e^{2x} = 5 \iff 2x = \ln 5 \iff x = \dfrac{\ln 5}{2}$. $S = \left\{\dfrac{\ln 5}{2}\right\}$ (environ 0,80).
4. Condition : $x > 0$. $\ln x \leqslant 1 = \ln e \iff x \leqslant e$. $S =]0\ ;\ e]$.
5. $3e^x = 6 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2$. $S = \{\ln 2\}$.
6. Conditions : $x > 0$ et $x - 3 > 0$, soit $x > 3$. $\ln x + \ln(x-3) = \ln\left(x(x-3)\right) = \ln 4 \iff x^2 - 3x = 4 \iff x^2 - 3x - 4 = 0$. $\Delta = 9 + 16 = 25$, racines $\dfrac{3-5}{2} = -1$ et $\dfrac{3+5}{2} = 4$. Seule 4 vérifie $x > 3$: $S = \{4\}$.

Corrigé de l'exercice 4.

1. $m_n < 1 \iff 0{,}75^n < 0{,}005 \iff n \ln 0{,}75 < \ln 0{,}005 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}005}{\ln 0{,}75} \approx 18{,}4$, car $\ln 0{,}75 < 0$ (la division change le sens). Le premier rang est $n = 19$: c'est bien ce que donnait le tableau de valeurs de la fiche sur les suites.

2. $C_n > 3000 \iff 1{,}04^n > 1{,}5 \iff n \ln 1{,}04 > \ln 1{,}5 \iff n > \dfrac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}04} \approx 10{,}3$, car $\ln 1{,}04 > 0$ (le sens est conservé). Le capital dépasse 3000 € au bout de 11 ans. Vérification : $C_{10} \approx 2960{,}49$ € et $C_{11} \approx 3078{,}91$ €.

Corrigé de l'exercice 5.

1. $f'(x) = \dfrac{3}{x} - 1$.
2. $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$: $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
3. Produit avec $u = x$, $v = \ln x$: $h'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.
4. $u = 2x + 5 > 0$, $u' = 2$: $k'(x) = \dfrac{2}{2x+5}$.
5. $m = v^2$ avec $v = \ln x$, donc $m' = 2vv'$: $m'(x) = 2 \ln x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2 \ln x}{x}$.
6. Quotient avec $u = \ln x$, $v = x$: $n'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

Corrigé de l'exercice 6.

1. En 0^+, croissances comparées : $x \ln x \to 0$. En $+\infty$, $x \to +\infty$ et $\ln x \to +\infty$, donc $f(x) \to +\infty$.
2. $f'(x) = \ln x + 1$. $f'(x) > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$, c'est-à-dire $x > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
3. f est décroissante sur $\left]0 \ ; \ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}} \ ; \ +\infty\right[$. Son minimum vaut $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \times (-1) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx -0{,}37$.

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	↗	$+\infty$

4. $f(1) = 1 \times \ln 1 = 0$ et $f'(1) = \ln 1 + 1 = 1$. La tangente a pour équation $y = 1 \times (x-1) + 0 = x - 1$.

Corrigé de l'exercice 7.

1. $C_n \geqslant 2C_0 \iff C_0 \times 1{,}03^n \geqslant 2C_0 \iff 1{,}03^n \geqslant 2$ (on divise par $C_0 > 0$) $\iff n \ln 1{,}03 \geqslant \ln 2$, en prenant le logarithme des deux membres positifs.

2. Comme $\ln 1{,}03 > 0$, $n \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx 23{,}4$. Le capital double au bout de 24 ans.

3. Le même calcul avec $1 + t$ à la place de 1,03 donne $n \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln(1+t)}$. Pour $t = 0{,}06$: $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}06} \approx 11{,}9$, soit 12 ans.

4. Règle des 70 : $\dfrac{70}{3} \approx 23{,}3$ ans pour 3 % et $\dfrac{70}{6} \approx 11{,}7$ ans pour 6 %. Les valeurs sont très proches des résultats exacts (23,4 et 11,9) : la règle repose sur $\ln 2 \approx 0{,}69$ et $\ln(1+t) \approx t$ pour un taux petit.

Corrigé de l'exercice 8.

1. **Réponse C.** $\ln(\mathrm{e}^y) = y$ pour tout réel y : ici 3.
   - A et B : le logarithme « défait » l'exponentielle, il ne la conserve pas.
   - D : confusion avec l'inverse.

2. **Réponse B.** $\ln 12 - \ln 3 = \ln\left(\dfrac{12}{3}\right) = \ln 4$.
   - A : on a soustrait les nombres $(12 - 3 = 9)$; une différence de logarithmes est le logarithme d'un quotient.
   - C : confusion avec la somme, $\ln 12 + \ln 3 = \ln 36$.
   - D : $\ln 4 \approx 1{,}39$, pas 4.

3. **Réponse D.** $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x : l'équation n'a pas de solution.
   - A : $\ln(-2)$ n'existe pas, le logarithme n'est défini que pour les nombres strictement positifs.
   - B : $-\ln 2 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est la solution de $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{2}$.
   - C : $\ln 2$ est la solution de $\mathrm{e}^x = 2$.

4. **Réponse A.** $u = 3x$, $u' = 3$: $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{3}{3x} = \dfrac{1}{x}$. On peut aussi écrire $\ln(3x) = \ln 3 + \ln x$, dont la dérivée est $\dfrac{1}{x}$.
   - B : u' oublié.
   - C : u' au numérateur mais u remplacé par x.
   - D : $\ln 3$ est une constante, sa dérivée est nulle.

Corrigé de l'exercice 9.

A. Vrai. C'est la propriété fondamentale du logarithme : il transforme les produits en sommes.

B. Faux. Contre-exemple : $a = b = 1$ donne $\ln 2 \approx 0{,}69$ à gauche et $0 + 0 = 0$ à droite.

C. Vrai. ln est croissante et $\ln 1 = 0$: pour $x < 1$, $\ln x < \ln 1 = 0$.

D. Faux. Elle n'est définie que sur $]0\ ;\ +\infty[$: $\ln 0$ et $\ln(-3)$ n'existent pas, car e^y ne prend jamais de valeur négative ou nulle.

E. Vrai. e^x est toujours strictement positif et son logarithme redonne l'exposant x.

F. Faux. L'égalité $e^{\ln x} = x$ n'a de sens que pour $x > 0$: pour $x = -1$, $\ln(-1)$ n'existe pas.

G. Vrai. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$: la courbe plonge le long de l'axe des ordonnées, qui est asymptote verticale.

H. Faux. Par croissances comparées, $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$: le logarithme croît beaucoup plus lentement que x ($\ln 10^6 \approx 13{,}8$).