La fonction logarithme népérien — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur la fonction logarithme népérien. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver la définition, les propriétés algébriques, la méthode de résolution des équations et la dérivée. Écris toujours la condition d'existence avant de résoudre.

Exercice 1 ***Comprendre la définition, étape par étape*** **(T^{le}).**

1. Compléter : $\ln 1 =$ ..... $\ln \mathrm{e} =$ ..... $\mathrm{e}^{\ln 5} =$ ..... $\ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right) =$ .....
   $\ln\left(\mathrm{e}^{2}\right) + \ln 1 =$ .....
2. Résoudre $\mathrm{e}^{x} = 7$, puis $\ln x = 2$ (valeur exacte, puis arrondi au centième).
   $\mathrm{e}^{x} = 7 \iff x =$ .....
   $\ln x = 2 \iff x =$ .....
3. Sans calculatrice, donner le signe de $\ln 0{,}5$, de $\ln 3$ et de $\ln 1$. Ranger dans l'ordre croissant $\ln 0{,}5$, $\ln 3$, $\ln 1$, $\ln 2$.

Exercice 2 ***Calculer avec les propriétés*** **(T^{le}).**

1. Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:
   a) $A = \ln 12 =$ .....
   b) $B = \ln\left(\dfrac{8}{9}\right) =$ .....
   c) $C = \ln\sqrt{6} =$ .....
   d) $D = \ln\left(\dfrac{1}{16}\right) =$ .....
   e) $E = \ln 6 - \ln 3 =$ .....
   f) $F = \ln 4 - 2\ln 2 =$ .....
2. Simplifier : $G = \mathrm{e}^{3\ln 2} =$ ..... $H = \ln\left(\mathrm{e}^{4}\right) - \ln(\mathrm{e}) =$ ..... $I = \ln\left(\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{2}\right) =$ .....

Exercice 3 ***Résoudre des équations et des inéquations*** **(T^{le}).** Résoudre dans $\mathbb{R}$, en précisant d'abord la condition d'existence.

1. $\ln x = 3$

   .....

   .....

2. $\ln(2x - 1) = \ln(x + 4)$

3. $e^{2x} = 5$

   .....

   .....

4. $\ln x \leqslant 1$

   .....

   .....

5. $3e^{x} - 6 = 0$

   .....

   .....

6. $\ln x + \ln(x - 3) = \ln 4$

Exercice 4 ***Seuil d'une suite géométrique, étape par étape*** (T^{le})**.**

1. Un médicament s'élimine de 25 % par heure : $m_n = 200 \times 0{,}75^n$ (en mg). On cherche le premier rang tel que $m_n < 1$. Compléter :
   $m_n < 1 \iff 0{,}75^n <$ ..... $\iff n \ln 0{,}75$ ..... ln(.....) $\iff$
   n ..... $\dfrac{\ln(\text{.....})}{\ln 0{,}75} \approx$ ....., car $\ln 0{,}75$ ..... 0.
   Le premier rang est $n =$ .....

2. Un capital de 2000 € placé à 4 % par an vaut $C_n = 2000 \times 1{,}04^n$ au bout de n années. Au bout de combien d'années dépasse-t-il 3000 € ?

Exercice 5 ***Dériver avec le logarithme*** **(T^{le}).** Dériver chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. $f(x) = 3\ln x - x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$: $f'(x) =$ .....
2. $g(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ sur $\mathbb{R}$: $g'(x) =$ .....
3. $h(x) = x\ln x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$: $h'(x) =$ .....
4. $k(x) = \ln(2x+5)$ sur $\left]-\dfrac{5}{2}\ ;\ +\infty\right[$: $k'(x) =$ .....
5. $m(x) = (\ln x)^2$ sur $]0\ ;\ +\infty[$: $m'(x) =$ .....
6. $n(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$: $n'(x) =$ .....

Exercice 6 ***Étudier une fonction avec le logarithme*** **(T^{le}).** Soit $f(x) = x\ln x$, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et résoudre $f'(x) > 0$.

3. Dresser le tableau de variations de f et préciser son minimum (valeur exacte, puis arrondie au centième).

4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

Exercice 7 ***Problème en contexte : temps de doublement*** **(*Tⁱᵉ*).** Un capital C_0 est placé à 3 % par an, les intérêts s'ajoutant chaque année au capital. On note $C_n = C_0 \times 1{,}03^n$ le capital au bout de n années.

1. Montrer que $C_n \geqslant 2C_0$ équivaut à $n \ln 1{,}03 \geqslant \ln 2$.

2. En déduire le nombre d'années nécessaire pour que le capital double.

3. Pour un taux annuel t quelconque, justifier que le temps de doublement est le premier entier supérieur ou égal à $\dfrac{\ln 2}{\ln(1+t)}$. Le calculer pour $t = 6\,\%$.

4. Les banquiers utilisent la « règle des 70 » : le temps de doublement vaut environ $\frac{70}{\text{taux en pourcentage}}$. Comparer avec les résultats précédents.

Exercice 8 *QCM* (T^{le}). Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. $\ln\left(e^3\right)$ est égal à :

   A. 3e **B.** e^3 **C.** 3 **D.** $\frac{1}{3}$

2. $\ln 12 - \ln 3$ est égal à :

   A. $\ln 9$ **B.** $\ln 4$ **C.** $\ln 36$ **D.** 4

3. L'équation $e^x = -2$:

   A. a pour solution $x = \ln(-2)$ **B.** a pour solution $x = -\ln 2$
   C. a pour solution $x = \ln 2$ **D.** n'a aucune solution

4. La dérivée de $x \mapsto \ln(3x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ est :

   A. $\frac{1}{x}$ **B.** $\frac{1}{3x}$ **C.** $\frac{3}{x}$ **D.** $\ln 3$

Exercice 9 *Vrai ou faux ?*. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

B. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$.

C. Si $0 < x < 1$, alors $\ln x < 0$.

D. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}$.

E. Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.

F. Pour tout réel x, $e^{\ln x} = x$.

G. La courbe de la fonction ln admet l'axe des ordonnées pour asymptote.

H. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = +\infty$.