Limites de fonctions et continuité

Que devient $f(x)$ lorsque x devient très grand, ou lorsque x se rapproche d'une valeur interdite ? Répondre à ces questions, c'est calculer des **limites**. Elles décrivent le comportement d'une courbe aux bords de son domaine : une limite finie en l'infini donne une **asymptote horizontale**, une limite infinie en un point une **asymptote verticale**. Les règles de calcul sont celles des suites, avec les mêmes quatre formes indéterminées, et deux outils supplémentaires : les croissances comparées pour l'exponentielle, et la **continuité**, qui permet, avec le théorème des valeurs intermédiaires, de prouver qu'une équation a une solution sans la calculer. La difficulté principale est de reconnaître une forme indéterminée et de choisir la bonne technique pour la lever.

Prérequis : Fonctions, Dérivation, Suites : récurrence et limites. **Pour s'entraîner :** Exercices : limites de fonctions.

Propriété 1 (Limites en l'infini et asymptote horizontale, T^le)

Limite finie : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ signifie que $f(x)$ se rapproche de ℓ autant qu'on veut lorsque x devient grand. La droite d'équation $y = \ell$ est alors **asymptote horizontale** à la courbe en $+\infty$.

Limite infinie : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$ dépasse tout nombre fixé lorsque x devient grand.

Même chose en $-\infty$: on regarde le comportement pour x très négatif.

Fonction	Limite en $+\infty$	Limite en $-\infty$
$x,\ x^3$	$+\infty$	$-\infty$
$x^2,\ x^4$	$+\infty$	$+\infty$
$\sqrt{x}$	$+\infty$	non définie
$\frac{1}{x},\ \frac{1}{x^2}$	0	0
e^x	$+\infty$	0

Exemple. Pour $f(x) = 3 + \frac{2}{x} : \frac{2}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$. La droite $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$ (et aussi en $-\infty$).

Exercice 1 *Limites en l'infini et asymptotes horizontales (T^{le})*

1. Donner la limite en $+\infty$ puis en $-\infty$ de chaque fonction.

   a) $f(x) = x^2 + 1$ b) $g(x) = 5 - \dfrac{1}{x^2}$

   c) $h(x) = -2x^3$ d) $k(x) = \mathrm{e}^x + 4$

2. Pour g et k, donner l'équation de chaque asymptote horizontale en précisant en quel infini elle est valable.

Propriété 2 (Limite en un point et asymptote verticale, T^{le})

Lorsque x se rapproche d'une valeur a où f n'est pas définie (souvent un dénominateur qui s'annule), $f(x)$ peut tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$. On distingue la limite **à gauche** ($x \to a$ avec $x < a$, notée $x \to a^-$) et **à droite** ($x \to a^+$). Si l'une des deux est infinie, la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale**.

Fonction	$x \to 0^-$	$x \to 0^+$
$\dfrac{1}{x}$	$-\infty$	$+\infty$
$\dfrac{1}{x^2}$	$+\infty$	$+\infty$

Méthode : limite d'un quotient en une valeur interdite

1. Calculer la limite du numérateur en a (souvent un réel non nul).
2. Étudier le **signe** du dénominateur à gauche et à droite de a (tableau de signes).
3. Conclure avec la règle « nombre non nul divisé par un nombre proche de 0 », en tenant compte du signe.

Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Le numérateur tend vers $7 > 0$. Le dénominateur $x - 3$ est négatif pour $x < 3$ et positif pour $x > 3$, et tend vers 0. Donc $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$: la droite $x = 3$ est asymptote verticale.

Exercice 2 *Limite en une valeur interdite, étape par étape (T^{le})* Soit $f(x) = \dfrac{x+4}{x-2}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

1. Compléter : quand $x \to 2$, le numérateur $x + 4 \to \ldots$
2. Compléter le tableau de signes de $x - 2$ autour de 2 : pour $x < 2$, $x - 2$ est ... ; pour $x > 2$, $x - 2$ est ...
3. En déduire $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \ldots$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \ldots$
4. Donner l'équation de l'asymptote verticale, puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et donner l'asymptote horizontale.

Propriété 3 (Opérations et formes indéterminées, T^{le})

Les règles sont celles des suites : somme, produit et quotient de limites, avec quatre formes indéterminées « $+\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », « $\dfrac{0}{0}$ ». Deux techniques pour les lever :

Factoriser par le terme dominant : pour un polynôme ou un quotient de polynômes en l'infini, la limite est celle du quotient des termes de plus haut degré.

Croissances comparées : l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Limite d'une composée : si $u(x) \to b$ et $g(X) \to \ell$ quand $X \to b$, alors $g(u(x)) \to \ell$. Par exemple $e^{-x^2} \to e^{-\infty}$, c'est-à-dire 0, quand $x \to +\infty$.

Exemples **A.** $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$ en $-\infty$: forme « $-\infty + \infty$ ». On factorise : $f(x) = x^3\left(2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right)$, avec $x^3 \to -\infty$ et la parenthèse $\to 2$, donc $f(x) \to -\infty$.

B. $g(x) = \dfrac{x^2-1}{2x^2+x}$ en $+\infty$: forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Quotient des termes dominants : $\dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$, donc $g(x) \to \dfrac{1}{2}$.

C. $h(x) = xe^x$ en $-\infty$: forme « $-\infty \times 0$ ». Par croissances comparées, $h(x) \to 0$.

Exercice 3 *Lever une forme indéterminée (T^{le})* Déterminer chaque limite, en précisant d'abord la forme indéterminée rencontrée.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 3x\right)$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2-4}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+5}{x^2+1}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x)$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+3)\,e^x$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2+1}$

Propriété 4 (Comparaison et encadrement, T^le)

Les théorèmes vus pour les suites s'appliquent aux fonctions, en $+\infty$, en $-\infty$ ou en un point :

Comparaison : si $f(x) \leqslant g(x)$ et $f(x) \to +\infty$, alors $g(x) \to +\infty$.
Gendarmes : si $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si g et h ont la même limite ℓ, alors $f(x) \to \ell$.

Utile dès que $\cos(x)$ ou $\sin(x)$ apparaît : on encadre ces fonctions entre -1 et 1.

Exercice 4 *Encadrer pour conclure (T^le)*

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + \sin(x))$.
3. Soit $f(x) = \dfrac{2x+\cos(x)}{x}$ pour $x > 0$. Montrer que $2 - \dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 2 + \dfrac{1}{x}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Théorème 1 (Continuité et théorème des valeurs intermédiaires, T^le)

Fonction continue : sa courbe se trace « sans lever le crayon ». Les fonctions polynômes, la racine carrée, l'exponentielle, et toutes leurs sommes, produits, quotients (là où ils sont définis) et composées sont continues. Toute fonction dérivable est continue.

Théorème des valeurs intermédiaires : si f est continue sur $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a\ ;\ b]$.

Cas strictement monotone : si de plus f est strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$, cette solution est **unique**.

Méthode : montrer que $f(x) = k$ a une unique solution

1. Justifier que f est continue et strictement monotone sur l'intervalle (souvent grâce au signe de f').
2. Calculer $f(a)$ et $f(b)$ (ou les limites aux bornes) et vérifier que k est compris entre les deux.

3. Conclure par le théorème des valeurs intermédiaires, puis encadrer la solution à la calculatrice (balayage ou tableau de valeurs).

Exemple. Soit $f(x) = x^3 + x - 1$ sur $[0\ ;\ 1]$. f est continue (polynôme) et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est strictement croissante. $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$: l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\ ;\ 1]$. Comme $f(0{,}6) \approx -0{,}18 < 0$ et $f(0{,}7) \approx 0{,}04 > 0$, on a $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$.

Exercice 5 *Théorème des valeurs intermédiaires (T^{le})* Soit $g(x) = x^3 - 3x + 3$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ (avec les limites en $-\infty$ et $+\infty$).
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in [-3\ ;\ -2]$.
3. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

Exercice 6 *Problème en contexte : étude complète d'une fonction (T^{le})* Le coût moyen de fabrication d'un objet, en euros, lorsqu'on en produit x centaines ($x > 0$), est modélisé par $\mathrm{C}(x) = 2 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{2}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{C}(x)$ et interpréter.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{C}(x)$. La courbe admet-elle une asymptote horizontale ?
3. Calculer $\mathrm{C}'(x)$ et montrer que $\mathrm{C}'(x) = \dfrac{x^2 - 16}{2x^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de C sur $]0\ ;\ +\infty[$ et déterminer la production qui rend le coût moyen minimal.

⚠ Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Oublier le signe du dénominateur	$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$	$-\infty$ à gauche, $+\infty$ à droite : deux limites distinctes
Conclure sur une forme indéterminée	$\dfrac{x^2+1}{x+1} \to \dfrac{\infty}{\infty} = 1$	termes dominants : $\dfrac{x^2}{x} = x \to +\infty$
Oublier les croissances comparées	« $xe^x \to -\infty \times 0$, donc 0 par réflexe »	c'est bien 0, mais il faut le justifier par les croissances comparées
Appliquer le TVI sans continuité ou sans monotonie	« $f(a) < 0 < f(b)$ donc une seule solution »	continuité pour l'existence, stricte monotonie pour l'unicité
Confondre asymptote et limite	« $y = 3$ est asymptote » sans dire où	préciser en $+\infty$, en $-\infty$, ou les deux

Exercice 7 *QCM (T^{le})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x+3}$ vaut :

   A. $+\infty$ **B.** $-\dfrac{1}{3}$ **C.** 0 **D.** 2

2. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3}{x-1}$ vaut :

   A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** 0

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^x$ vaut :

   A. $-\infty$ **B.** 0 **C.** $+\infty$ **D.** 1

4. Si f est continue sur $[0\ ;\ 2]$ avec $f(0) = -1$ et $f(2) = 3$, alors l'équation $f(x) = 0$:

   A. n'a aucune solution **B.** a exactement une solution dans $[0\ ;\ 2]$

   C. a au moins une solution dans $[0\ ;\ 2]$ **D.** a pour solution $x = 1$

Exercice 8 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, alors la droite $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

B. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5}{\mathrm{e}^x} = +\infty$.

D. Une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$ s'annule au moins une fois sur $[a\ ;\ b]$.

E. Si $f(x) \to +\infty$ et $g(x) \to +\infty$ en $+\infty$, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 1$.

F. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

G. Une fonction dérivable sur un intervalle y est continue.

H. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet une limite en 0.

Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche ***Que faire quand je bloque ?***
Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche ***Mémorisation et sciences cognitives****.*
Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton ***Carnet d'erreurs****.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1.

   a) $x^2 \to +\infty$ dans les deux cas, donc $f(x) \to +\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b) $\dfrac{1}{x^2} \to 0$ dans les deux cas, donc $g(x) \to 5$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c) $x^3 \to +\infty$ en $+\infty$, donc $h(x) \to -\infty$; $x^3 \to -\infty$ en $-\infty$, donc $h(x) \to +\infty$.

   d) $\mathrm{e}^x \to +\infty$ en $+\infty$, donc $k(x) \to +\infty$; $\mathrm{e}^x \to 0$ en $-\infty$, donc $k(x) \to 4$.

2. Pour g : la droite $y = 5$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$. Pour k : la droite $y = 4$ est asymptote horizontale en $-\infty$ seulement ; en $+\infty$, la courbe monte vers l'infini.

Corrigé de l'exercice 2.

1. Le numérateur tend vers $2 + 4 = 6$, nombre strictement positif.
2. Pour $x < 2$, $x - 2 < 0$; pour $x > 2$, $x - 2 > 0$; et $x - 2 \to 0$.
3. Un nombre proche de 6 divisé par un nombre négatif proche de 0 donne $-\infty$: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$. De même $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$.
4. Asymptote verticale : $x = 2$. En l'infini, $f(x) = \dfrac{x\left(1 + \frac{4}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \dfrac{1 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \to 1$ en $+\infty$ comme en $-\infty$: la droite $y = 1$ est asymptote horizontale.

Corrigé de l'exercice 3.

1. Forme « $+\infty - \infty$ ». $x^2 - 3x = x^2\left(1 - \dfrac{3}{x}\right) \to +\infty$.
2. Forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Quotient des termes dominants $\dfrac{3x^2}{x^2} = 3$: la limite est 3.
3. Forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». $\dfrac{x+5}{x^2+1} = \dfrac{x\left(1 + \frac{5}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1 + \frac{5}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \to 0 \times 1 = 0$.
4. Forme « $+\infty - \infty$ ». $\mathrm{e}^x - x = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right)$; par croissances comparées $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \to +\infty$, donc la limite est $+\infty$.
5. Forme « $+\infty \times 0$ ». $\left(x^2 + 3\right)\mathrm{e}^x = x^2\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^x$; par croissances comparées $x^2\mathrm{e}^x \to 0$, et $3\mathrm{e}^x \to 0$: la limite est 0.
6. Forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$; le premier facteur tend vers $+\infty$ (croissances comparées) et le second vers 1 : la limite est $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 4.

1. Pour $x > 0$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\cos(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$. Les deux bornes tendent vers 0 : par le théorème des gendarmes, la limite est 0.
2. $\sin(x) \geqslant -1$, donc $x + \sin(x) \geqslant x - 1$, et $x - 1 \to +\infty$: par comparaison, $x + \sin(x) \to +\infty$.
3. $f(x) = 2 + \dfrac{\cos(x)}{x}$ et $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donnent, pour $x > 0$, $2 - \dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 2 + \dfrac{1}{x}$. Les deux bornes tendent vers 2 : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Corrigé de l'exercice 5.

1. $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, positif à l'extérieur de $[-1\ ;\ 1]$, négatif entre. $g(-1) = -1+3+3 = 5$ et $g(1) = 1-3+3 = 1$. En l'infini, $g(x) = x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)$ a le comportement de x^3 :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

2. Sur $[-1\ ;\ +\infty[$, g admet 1 pour minimum, donc $g(x) \geqslant 1 > 0$: aucune solution. Sur $]-\infty\ ;\ -1]$, g est continue, strictement croissante, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $g(-1) = 5 > 0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle, donc dans $\mathbb{R}$. De plus $g(-3) = -27 + 9 + 3 = -15 < 0$ et $g(-2) = -8 + 6 + 3 = 1 > 0$, donc $\alpha \in [-3\ ;\ -2]$.
3. À la calculatrice, $g(-2{,}2) \approx -1{,}05 < 0$ et $g(-2{,}1) \approx 0{,}04 > 0$, donc $-2{,}2 < \alpha < -2{,}1$.

Corrigé de l'exercice 6.

1. Quand $x \to 0^+$, $\dfrac{8}{x} \to +\infty$ et les autres termes tendent vers 2 et 0 : $C(x) \to +\infty$. Produire très peu d'objets coûte très cher à l'unité (les coûts fixes se répartissent sur peu d'objets). La droite $x = 0$ est asymptote verticale.
2. Quand $x \to +\infty$, $\dfrac{8}{x} \to 0$ et $\dfrac{x}{2} \to +\infty$: $C(x) \to +\infty$. Pas d'asymptote horizontale : au-delà d'un certain volume, le coût moyen remonte.
3. $C'(x) = -\dfrac{8}{x^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{-16 + x^2}{2x^2} = \dfrac{x^2 - 16}{2x^2}$.
4. Le dénominateur est positif ; $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$ est négatif sur $]0\ ;\ 4[$ et positif sur $]4\ ;\ +\infty[$. $C(4) = 2 + 2 + 2 = 6$:

x	0		4		$+\infty$
$C'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$C(x)$	‖	$+\infty$ ↘	6	↗	$+\infty$

Le coût moyen est minimal pour $x = 4$, soit quatre cents objets, et vaut 6 €.

Corrigé de l'exercice 7.

1. **Réponse D.** Quotient des termes dominants : $\dfrac{2x}{x} = 2$.
   - A : forme « $\frac{\infty}{\infty}$ » conclue trop vite.
   - B : quotient des constantes, sans rapport avec la limite en l'infini.
   - C : ce serait le cas si le degré du dénominateur dépassait celui du numérateur.
2. **Réponse A.** À droite de 1, $x - 1 > 0$ et tend vers 0 : $\dfrac{3}{x-1} \to +\infty$.
   - B : c'est la limite à gauche ($x - 1 < 0$).
   - C : on ne remplace pas x par 1 dans le dénominateur, qui s'annule.
   - D : $\dfrac{3}{x-1}$ tend vers 0 en l'infini, pas en 1.
3. **Réponse B.** Croissances comparées : en $-\infty$, l'exponentielle l'emporte et $x^n \mathrm{e}^x \to 0$.
   - A : on a suivi $x^3 \to -\infty$ en oubliant $\mathrm{e}^x \to 0$: forme indéterminée.
   - C : confusion avec la limite en $+\infty$.
   - D : aucune raison.
4. **Réponse C.** Le théorème des valeurs intermédiaires garantit au moins une solution, car 0 est compris entre -1 et 3.
   - A : contredit le théorème.
   - B : l'unicité demanderait la stricte monotonie, non donnée.
   - D : rien n'indique où se trouve la solution.

Corrigé de l'exercice 8.

A. Vrai. C'est la définition de l'asymptote horizontale : la courbe se rapproche indéfiniment de la droite $y = 2$.

B. Vrai. $x^2 > 0$ des deux côtés de 0 et tend vers 0 : le quotient tend vers $+\infty$ à gauche comme à droite.

C. Faux. Par croissances comparées, $\dfrac{e^x}{x^5} \to +\infty$, donc $\dfrac{x^5}{e^x} \to 0$: l'exponentielle l'emporte sur toute puissance.

D. Vrai. $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, donc 0 est compris entre eux : le théorème des valeurs intermédiaires donne une solution de $f(x) = 0$.

E. Faux. « $\frac{\infty}{\infty}$ » est une forme indéterminée : avec $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$, le quotient tend vers $+\infty$; avec $f(x) = 2x$ et $g(x) = x$, vers 2.

F. Vrai. C'est une limite de référence : la courbe de l'exponentielle admet l'axe des abscisses pour asymptote en $-\infty$.

G. Vrai. La dérivabilité entraîne la continuité (la réciproque est fausse : la valeur absolue est continue en 0 sans y être dérivable).

H. Faux. Les limites à gauche $(-\infty)$ et à droite $(+\infty)$ sont différentes : il n'y a pas de limite en 0, seulement deux limites unilatérales.