Limites de fonctions et continuité — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur les limites de fonctions. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver les limites de référence, les formes indéterminées, les croissances comparées et le théorème des valeurs intermédiaires. Avant de conclure une limite, demande-toi toujours s'il s'agit d'une forme indéterminée.

Exercice 1 ***Limites en l'infini et asymptotes horizontales*** **(T^{le}).**

1. Donner la limite en $+\infty$ puis en $-\infty$ de chaque fonction.
   a) $f(x) = x^2 + 1$: en $+\infty$: ..... en $-\infty$: .....
   b) $g(x) = 5 - \dfrac{1}{x^2}$: en $+\infty$: ..... en $-\infty$: .....
   c) $h(x) = -2x^3$: en $+\infty$: ..... en $-\infty$: .....
   d) $k(x) = \mathrm{e}^x + 4$: en $+\infty$: ..... en $-\infty$: .....
2. Pour g et k, donner l'équation de chaque asymptote horizontale en précisant en quel infini elle est valable.

.....

.....

.....

Exercice 2 ***Limite en une valeur interdite, étape par étape*** **(T^{le}).** Soit $f(x) = \dfrac{x+4}{x-2}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

1. Compléter : quand $x \to 2$, le numérateur $x + 4 \to$ .....
2. Compléter : pour $x < 2$, $x - 2$ est ..... pour $x > 2$, $x - 2$ est .....
3. En déduire $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$ ..... et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$ .....
4. Donner l'équation de l'asymptote verticale, puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et donner l'asymptote horizontale.

Exercice 3 ***Lever une forme indéterminée*** **(T^{le}).** Déterminer chaque limite, en précisant d'abord la forme indéterminée rencontrée.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 3x\right)$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 - 4}$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 5}{x^2 + 1}$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\mathrm{e}^x - x)$

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + 3\right) \mathrm{e}^x$

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2 + 1}$

Exercice 4 *Encadrer pour conclure* (T^{le})**.**

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x}$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\sin(x))$.

3. Soit $f(x) = \dfrac{2x+\cos(x)}{x}$ pour $x > 0$. Montrer que $2 - \dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 2 + \dfrac{1}{x}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 5 *Théorème des valeurs intermédiaires* (T^{le})**.** Soit $g(x) = x^3 - 3x + 3$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ (avec les limites en $-\infty$ et $+\infty$).

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in [-3\ ;\ -2]$.

3. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

. . . . . .

. . . . . .

Exercice 6 ***Problème en contexte : étude complète d'une fonction*** (T^{le})**.** Le coût moyen de fabrication d'un objet, en euros, lorsqu'on en produit x centaines $(x > 0)$, est modélisé par $\mathrm{C}(x) = 2 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{2}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \mathrm{C}(x)$ et interpréter.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{C}(x)$. La courbe admet-elle une asymptote horizontale ?

3. Calculer $\mathrm{C}'(x)$ et montrer que $\mathrm{C}'(x) = \dfrac{x^2 - 16}{2x^2}$.

4. Dresser le tableau de variations de C sur $]0\ ;\ +\infty[$ et déterminer la production qui rend le coût moyen minimal.

Exercice 7 *QCM* (T^{le})**.** Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x+3}$ vaut :

   A. $+\infty$ **B.** $-\dfrac{1}{3}$ **C.** 0 **D.** 2

2. $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{3}{x-1}$ vaut :

   A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** 0

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\mathrm{e}^x$ vaut :

   A. $-\infty$ **B.** 0 **C.** $+\infty$ **D.** 1

4. Si f est continue sur $[0\ ;\ 2]$ avec $f(0) = -1$ et $f(2) = 3$, alors l'équation $f(x) = 0$:

   A. n'a aucune solution **B.** a exactement une solution dans $[0\ ;\ 2]$

   C. a au moins une solution dans $[0\ ;\ 2]$ **D.** a pour solution $x = 1$

Exercice 8 *Vrai ou faux ?***.** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, alors la droite $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

B. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

C. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^5}{\mathrm{e}^x} = +\infty$.

D. Une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$ s'annule au moins une fois sur $[a\ ;\ b]$.

E. Si $f(x) \to +\infty$ et $g(x) \to +\infty$ en $+\infty$, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 1$.

F. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

G. Une fonction dérivable sur un intervalle y est continue.

H. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet une limite en 0.