Primitives et intégrales

Dériver, c'est passer d'une fonction à sa vitesse de variation. Chercher une **primitive**, c'est faire le chemin inverse : retrouver une fonction dont on connaît la dérivée. Ce calcul à rebours a une application spectaculaire : l'**intégrale** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, qui mesure l'aire sous la courbe de f entre a et b, se calcule simplement comme $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, où F est une primitive de f. On peut ainsi calculer une aire, une distance parcourue à partir d'une vitesse, un volume écoulé à partir d'un débit, ou la valeur moyenne d'une grandeur. La difficulté principale est de reconnaître la forme d'une fonction pour lui associer la bonne primitive, sans confondre le sens de la dérivation.

Prérequis : Dérivation, Fonction exponentielle, Fonction logarithme. **Pour s'entraîner :** Exercices : primitives et intégrales.

Propriété 1 (Primitives, T^le)

Définition : F est une **primitive** de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et $\mathrm{F}' = f$.

Existence : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Unicité à une constante près : si F est une primitive de f, toutes les primitives de f sont les fonctions F + C, où C est une constante réelle. Une condition comme $\mathrm{F}(0) = 2$ fixe la constante.

Fonction $f(x)$	**Une primitive** $\mathrm{F}(x)$
k (constante)	kx
x^n (n entier, $n \neq -1$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x^2}$ (sur $]0\ ;\ +\infty[$)	$-\dfrac{1}{x}$
$\dfrac{1}{x}$ (sur $]0\ ;\ +\infty[$)	$\ln x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (sur $]0\ ;\ +\infty[$)	$2\sqrt{x}$
e^x	e^x

Propriété 2 (Primitives et fonctions composées, T^le)

On lit les formules de dérivation à l'envers : pour u dérivable,

Fonction	Une primitive
$u' \, \mathrm{e}^u$	e^u
$\dfrac{u'}{u}$ (avec $u > 0$)	$\ln u$
$u' \, u^n$ $(n \neq -1)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{u^2}$ (avec $u \neq 0$)	$-\dfrac{1}{u}$

Une primitive d'une somme est la somme des primitives, et une primitive de $k\,f$ est k fois une primitive de f.

Méthode : trouver une primitive

1. Repérer la forme : somme de fonctions usuelles, ou composée $u' \, g(u)$.
2. Pour une composée, identifier u, calculer u' et vérifier qu'il apparaît (à un coefficient près) en facteur.
3. Ajuster le coefficient : si l'on obtient $3\,u'\mathrm{e}^u$ au lieu de $u'\mathrm{e}^u$, la primitive est $3\,\mathrm{e}^u$; si l'on a $\dfrac{u'}{2}\mathrm{e}^u$, c'est $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^u$.
4. **Vérifier en dérivant** le résultat : on doit retrouver f.

Exemples **A.** $f(x) = 6x^2 - 4x + 1$: $\mathrm{F}(x) = 6 \times \dfrac{x^3}{3} - 4 \times \dfrac{x^2}{2} + x = 2x^3 - 2x^2 + x$. Vérification : $\mathrm{F}'(x) = 6x^2 - 4x + 1$. ✓

B. $g(x) = \mathrm{e}^{3x}$: avec $u = 3x$, $u' = 3$, on a $g = \dfrac{1}{3} \times 3\mathrm{e}^{3x} = \dfrac{1}{3}u'\mathrm{e}^u$, donc $\mathrm{G}(x) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$. Vérification : $\mathrm{G}'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}$. ✓

C. $h(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$: $u = x^2 + 1 > 0$ et $u' = 2x$, forme $\dfrac{u'}{u}$, donc $\mathrm{H}(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

Exercice 1 *Trouver une primitive, étape par étape (T^le)*

1. Compléter : une primitive de $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ est $\mathrm{F}(x) = 3 \times \frac{x^{\cdots}}{\cdots} - 4 \times \frac{x^{\cdots}}{\cdots} + 5x = \ldots$
   Vérification : $\mathrm{F}'(x) = \ldots$
2. Compléter : $g(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$ est de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u = \ldots$ et $u' = \ldots$, donc une primitive est $\mathrm{G}(x) = \ldots$
3. Compléter : $h(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+3}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = \ldots$, qui est strictement positif car son discriminant vaut $\ldots < 0$; une primitive est $\mathrm{H}(x) = \ldots$
4. Déterminer la primitive F de $f(x) = 2x + 1$ qui vérifie $\mathrm{F}(0) = 2$.

Exercice 2 *Primitives usuelles et composées (T^le)* Donner une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué, puis vérifier en dérivant.

a) $f(x) = x^4 - 2x$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = \dfrac{5}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

c) $h(x) = \dfrac{3}{x^2}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

d) $k(x) = (x+1)^3$ sur $\mathbb{R}$

e) $m(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$

f) $n(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$

Propriété 3 (Intégrale et aire, T^le)

Soit f continue sur $[a\ ;\ b]$.

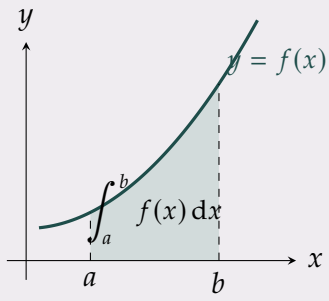
Définition (cas $f \geqslant 0$) : l'**intégrale** de f entre a et b, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, est l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

Théorème fondamental : si F est une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Le résultat ne dépend pas de la primitive choisie : la constante C disparaît dans la différence.

Cas $f \leqslant 0$: l'intégrale est négative et vaut l'opposé de l'aire entre la courbe et l'axe.



Exemple. $\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$: l'aire sous la parabole entre 0 et 2 vaut $\frac{8}{3}$ unités d'aire, soit environ 2,67.

Exercice 3 *Calculer une intégrale, étape par étape (T^{le})*

1. Compléter : une primitive de $f(x) = 2x + 1$ est $\mathrm{F}(x) = \ldots$, donc

$$\int_1^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x = \Big[\ldots\Big]_1^3 = \mathrm{F}(3) - \mathrm{F}(1) = \ldots - \ldots = \ldots$$

2. Retrouver ce résultat par un calcul d'aire : le domaine sous la droite $y = 2x + 1$ entre $x = 1$ et $x = 3$ est un trapèze.
3. Calculer :

a) $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ b) $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

c) $\mathrm{K} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ d) $\mathrm{L} = \displaystyle\int_0^2 \left(x^2 - 3x\right)\mathrm{d}x$

4. Interpréter le signe de L.

Propriété 4 (Propriétés de l'intégrale, T^{le})

Pour f et g continues, k réel :

Linéarité : $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Bornes : $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Positivité et ordre : si $f \geqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$; si $f \leqslant g$ sur $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Valeur moyenne : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$: c'est la hauteur du rectangle de largeur $b-a$ qui a la même aire que le domaine sous la courbe.

Exercice 4 *Utiliser les propriétés* (T^{le}) On sait que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ et $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_5^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^2 \big(3f(x)+1\big)\mathrm{d}x$.
2. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0\ ;\ 5]$.
3. Sans calculer d'intégrale, comparer $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$. Vérifier ensuite par le calcul.

Exercice 5 *Aire entre deux courbes* (T^{le}) Soient $f(x) = x+2$ et $g(x) = x^2$.

1. Montrer que $f(x) - g(x) = -(x-2)(x+1)$ et en déduire que $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[-1\ ;\ 2]$.
2. L'aire du domaine compris entre les deux courbes sur $[-1\ ;\ 2]$ vaut $\displaystyle\int_{-1}^2 \big(f(x) - g(x)\big)\mathrm{d}x$. Calculer cette aire.

Exercice 6 *Problème en contexte : vidange d'une cuve* (T^{le}) Une cuve se vide. Le débit d'écoulement, en litres par minute, à l'instant t (en minutes) est $d(t) = 20\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$, pour $t \geqslant 0$. Le volume écoulé entre les instants 0 et T est $\mathrm{V(T)} = \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} d(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\mathrm{D}(t) = -100\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ est une primitive de d.
2. Calculer le volume écoulé pendant les dix premières minutes (arrondir au dixième de litre).
3. En déduire le débit moyen sur ces dix minutes.
4. Calculer $\lim\limits_{\mathrm{T}\to+\infty} \mathrm{V(T)}$. Que représente cette limite ?

Exercice 7 *Problème en contexte : de la vitesse à la distance (Tle)* Un mobile a pour vitesse, en mètres par seconde, $v(t) = -0{,}5t^2 + 4t$ pour $t \in [0\ ;\ 8]$ (en secondes). La distance parcourue entre les instants 0 et 8 est $\displaystyle\int_0^8 v(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que $v(t) \geqslant 0$ sur $[0\ ;\ 8]$ et déterminer l'instant où la vitesse est maximale.
2. Calculer la distance parcourue (valeur exacte puis arrondie au décimètre).
3. En déduire la vitesse moyenne sur le trajet.

Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Dériver au lieu de « remonter »	primitive de x^3 : $3x^2$	$\dfrac{x^4}{4}$: on augmente l'exposant, on divise par le nouvel exposant
Confondre $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x^2}$	primitive de $\dfrac{1}{x}$: $-\dfrac{1}{x^2}$	$\ln x$ (sur $]0\ ;\ +\infty[$) ; $-\dfrac{1}{x^2}$ est la dérivée
Oublier le coefficient de u'	primitive de e^{3x} : e^{3x}	$\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$: dériver pour vérifier
Additionner au lieu de soustraire	$\displaystyle\int_a^b f = \mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(a)$	$\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, borne du haut moins borne du bas
Confondre intégrale et aire	« $\displaystyle\int_0^2 (x^2 - 3x)\,\mathrm{d}x = -\frac{10}{3}$, donc aire négative »	l'aire est $\frac{10}{3}$; l'intégrale est négative car la courbe est sous l'axe

Exercice 8 *QCM (Tle)* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. Une primitive de $x \mapsto x^3$ est :

   A. $3x^2$ **B.** $\dfrac{x^4}{4}$ **C.** x^4 **D.** $4x^4$

2. $\displaystyle\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x$ vaut :

   A. 2 **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** 0

3. Si $f \leqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$:

   A. est l'aire du domaine entre la courbe et l'axe **B.** est positive

C. est nulle

D. est l'opposé de l'aire du domaine entre la courbe et l'axe

4. Une primitive de $x \mapsto e^{2x}$ est :

A. $\frac{1}{2}e^{2x}$ **B.** e^{2x} **C.** $2e^{2x}$ **D.** e^{x^2}

Exercice 9 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

B. Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

C. Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b)$.

D. Si $f \geqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$ (avec $a < b$), alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

E. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

F. $\int_3^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour toute fonction f continue.

G. La valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$ est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

H. $\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 4$.

Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche ***Que faire quand je bloque ?***
Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche ***Mémorisation et sciences cognitives****.*
Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton ***Carnet d'erreurs****.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. $\mathrm{F}(x) = 3 \times \dfrac{x^3}{3} - 4 \times \dfrac{x^2}{2} + 5x = x^3 - 2x^2 + 5x$. Vérification : $\mathrm{F}'(x) = 3x^2 - 4x + 5 = f(x)$. ✓
2. $u = x^2$ et $u' = 2x$: $g = u'\mathrm{e}^u$, donc $\mathrm{G}(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.
3. $u = x^2 + x + 3$, de discriminant $1 - 12 = -11 < 0$ et de coefficient dominant positif, donc $u > 0$ sur $\mathbb{R}$; $u' = 2x + 1$. Une primitive est $\mathrm{H}(x) = \ln\left(x^2 + x + 3\right)$.
4. Les primitives de f sont $\mathrm{F}(x) = x^2 + x + \mathrm{C}$. La condition $\mathrm{F}(0) = 2$ donne $\mathrm{C} = 2$: $\mathrm{F}(x) = x^2 + x + 2$.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^5}{5} - x^2$. Vérification : $\mathrm{F}'(x) = x^4 - 2x$. ✓
2. $\mathrm{G}(x) = 5\ln x$. Vérification : $\mathrm{G}'(x) = \dfrac{5}{x}$. ✓
3. $\mathrm{H}(x) = -\dfrac{3}{x}$. Vérification : $\mathrm{H}'(x) = \dfrac{3}{x^2}$. ✓
4. $u = x + 1$, $u' = 1$, forme $u'u^3$: $\mathrm{K}(x) = \dfrac{(x+1)^4}{4}$. Vérification : $\mathrm{K}'(x) = \dfrac{4(x+1)^3}{4} = (x+1)^3$. ✓
5. $u = x^2$, $u' = 2x$: $m = \dfrac{1}{2} \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2} = \dfrac{1}{2}u'\mathrm{e}^u$, donc $\mathrm{M}(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$. Vérification : $\mathrm{M}'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2} = x\,\mathrm{e}^{x^2}$. ✓
6. $u = 2x + 1 > 0$, $u' = 2$: $n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{2x+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u}$, donc $\mathrm{N}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(2x+1)$. Vérification : $\mathrm{N}'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{2x+1} = \dfrac{1}{2x+1}$. ✓

Corrigé de l'exercice 3.

1. $\mathrm{F}(x) = x^2 + x$, donc $\displaystyle\int_1^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x = \Big[x^2 + x\Big]_1^3 = (9+3) - (1+1) = 12 - 2 = 10$.
2. Le trapèze a pour bases $f(1) = 3$ et $f(3) = 7$, et pour hauteur $3 - 1 = 2$: aire $= \dfrac{(3+7) \times 2}{2} = 10$. Les deux calculs concordent. ✓
3. a) $\mathrm{I} = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$.

   b) $\mathrm{J} = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^{\ln 2} = \mathrm{e}^{\ln 2} - \mathrm{e}^0 = 2 - 1 = 1$.

   c) $\mathrm{K} = \Big[\ln x\Big]_1^{\mathrm{e}} = \ln \mathrm{e} - \ln 1 = 1 - 0 = 1$.

d) $\mathrm{L} = \left[\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}\right]_0^2 = \dfrac{8}{3} - 6 = -\dfrac{10}{3}$.

4. Sur $[0\ ;\ 2]$, $x^2 - 3x = x(x-3) \leqslant 0$: la courbe est sous l'axe des abscisses. L'intégrale est négative et l'aire du domaine entre la courbe et l'axe vaut $\dfrac{10}{3}$ unités d'aire.

Corrigé de l'exercice 4.

1. Chasles : $\displaystyle\int_0^5 f = 5 + (-1) = 4$. Bornes échangées : $\displaystyle\int_5^0 f = -4$. Linéarité : $\displaystyle\int_0^2 (3f+1) = 3\times 5 + \int_0^2 1\,\mathrm{d}x = 15 + 2 = 17$.
2. $\mu = \dfrac{1}{5-0}\times 4 = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$.
3. Sur $[0\ ;\ 1]$, $x^2 \leqslant x$ (car $0 \leqslant x \leqslant 1$), donc $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$. Vérification : $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2}$. ✓

Corrigé de l'exercice 5.

1. $f(x) - g(x) = -x^2 + x + 2$. Le trinôme $x^2 - x - 2$ a pour racines 2 et -1, donc $-x^2 + x + 2 = -(x-2)(x+1)$. Sur $[-1\ ;\ 2]$, $x - 2 \leqslant 0$ et $x + 1 \geqslant 0$, donc $-(x-2)(x+1) \geqslant 0$: $f(x) \geqslant g(x)$, la droite est au-dessus de la parabole.

2. $$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$
$$\mathcal{A} = \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$
L'aire vaut 4,5 unités d'aire.

Corrigé de l'exercice 6.

1. $\mathrm{D}'(t) = -100 \times (-0{,}2)\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 20\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = d(t)$. ✓
2. $\mathrm{V}(10) = \left[-100\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right]_0^{10} = -100\,\mathrm{e}^{-2} + 100 = 100\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) \approx 86{,}5$ litres.
3. Débit moyen $= \dfrac{1}{10}\mathrm{V}(10) \approx 8{,}65$ litres par minute (la valeur moyenne de d sur $[0\ ;\ 10]$).
4. $\mathrm{V(T)} = 100\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2\mathrm{T}}\right)$ et $\mathrm{e}^{-0{,}2\mathrm{T}} \to 0$ quand $\mathrm{T} \to +\infty$, donc $\mathrm{V(T)} \to 100$. La cuve contenait 100 litres : c'est le volume total qui finit par s'écouler, la vidange devenant de plus en plus lente.

Corrigé de l'exercice 7.

1. $v(t) = t(4 - 0{,}5t)$; sur $[0\ ;\ 8]$, $t \geqslant 0$ et $4 - 0{,}5t \geqslant 0$, donc $v(t) \geqslant 0$. $v'(t) = -t + 4$ s'annule en $t = 4$ en passant du positif au négatif : la vitesse est maximale à $t = 4$ s et vaut $v(4) = -8 + 16 = 8$ m/s.

2. $\displaystyle\int_0^8 \left(-0{,}5t^2+4t\right)\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^3}{6}+2t^2\right]_0^8 = -\frac{512}{6}+128 = -\frac{256}{3}+\frac{384}{3} = \frac{128}{3} \approx 42{,}7$ mètres.
3. Vitesse moyenne $= \frac{1}{8}\times\frac{128}{3} = \frac{16}{3} \approx 5{,}3$ m/s. C'est la valeur moyenne de v sur $[0\ ;\ 8]$, inférieure à la vitesse maximale de 8 m/s.

Corrigé de l'exercice 8.

1. **Réponse B.** $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{4x^3}{4} = x^3$.
   - A : c'est la dérivée de x^3, pas une primitive.
   - C : la dérivée de x^4 est $4x^3$, il manque la division par 4.
   - D : la dérivée de $4x^4$ est $16x^3$.
2. **Réponse C.** $\left[x^2\right]_0^1 = 1-0 = 1$. C'est l'aire du triangle de base 1 et de hauteur 2.
   - A : on a pris la valeur $2x$ en $x=1$ sans intégrer.
   - B : confusion avec $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.
   - D : la fonction n'est pas nulle sur $[0\ ;\ 1]$, son intégrale non plus.
3. **Réponse D.** Une fonction négative donne une intégrale négative, égale à l'opposé de l'aire.
   - A : l'aire est positive, l'intégrale est négative.
   - B : le signe de l'intégrale suit celui de la fonction.
   - C : elle n'est nulle que si f est nulle.
4. **Réponse A.** $\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right)' = \frac{1}{2}\times 2\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$.
   - B : la dérivée de e^{2x} est $2\mathrm{e}^{2x}$, il manque le coefficient $\frac{1}{2}$.
   - C : c'est la dérivée de e^{2x}.
   - D : la dérivée de e^{x^2} est $2x\,\mathrm{e}^{x^2}$.

Corrigé de l'exercice 9.

A. Vrai. C'est le théorème d'existence des primitives, admis en terminale.

B. Vrai. Si $\mathrm{F}' = \mathrm{G}' = f$, alors $(\mathrm{F}-\mathrm{G})' = 0$, donc $\mathrm{F}-\mathrm{G}$ est constante sur l'intervalle.

C. Faux. C'est $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$: la borne du haut d'abord. L'ordre inverse change le signe.

D. Vrai. C'est la positivité de l'intégrale : l'aire sous une courbe située au-dessus de l'axe est positive.

E. Faux. $-\dfrac{1}{x^2}$ est la *dérivée* de $\dfrac{1}{x}$. Une primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ est $\ln x$.

F. Vrai. $F(3) - F(3) = 0$: un domaine de largeur nulle a une aire nulle.

G. Vrai. C'est la définition : le rectangle de largeur $b - a$ et de hauteur μ a la même aire que le domaine sous la courbe.

H. Faux. $\displaystyle\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$: c'est l'aire d'un triangle de base 2 et de hauteur 2.