Primitives et intégrales — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur les primitives et les intégrales. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver les tableaux de primitives, le théorème fondamental et les propriétés de l'intégrale. Vérifie chaque primitive en la dérivant.

Exercice 1 ***Trouver une primitive, étape par étape*** **(T^{le}).**

1. Compléter : une primitive de $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ est
   $\mathrm{F}(x) = 3 \times \frac{x^{\cdots\cdots}}{\cdots\cdots} - 4 \times \frac{x^{\cdots\cdots}}{\cdots\cdots} + 5x = \cdots\cdots$
   Vérification : $\mathrm{F}'(x) = \cdots\cdots$

2. Compléter : $g(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$ est de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u = \cdots\cdots$ et $u' = \cdots\cdots$ donc une primitive est $\mathrm{G}(x) = \cdots\cdots$

3. Compléter : $h(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+3}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = \cdots\cdots$ qui est strictement positif car son discriminant vaut $\cdots\cdots < 0$; une primitive est $\mathrm{H}(x) = \cdots\cdots$

4. Déterminer la primitive F de $f(x) = 2x + 1$ qui vérifie $\mathrm{F}(0) = 2$.

Exercice 2 ***Primitives usuelles et composées*** **(T^{le}).** Donner une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué, puis vérifier en dérivant.

1. $f(x) = x^4 - 2x$ sur $\mathbb{R}$: $\mathrm{F}(x) = \cdots\cdots$ Vérification : $\cdots\cdots$
2. $g(x) = \dfrac{5}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$: $\mathrm{G}(x) = \cdots\cdots$ Vérification : $\cdots\cdots$
3. $h(x) = \dfrac{3}{x^2}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$: $\mathrm{H}(x) = \cdots\cdots$ Vérification : $\cdots\cdots$
4. $k(x) = (x+1)^3$ sur $\mathbb{R}$: $\mathrm{K}(x) = \cdots\cdots$ Vérification : $\cdots\cdots$
5. $m(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$: $\mathrm{M}(x) = \cdots\cdots$ Vérification : $\cdots\cdots$
6. $n(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$:
   $\mathrm{N}(x) = \cdots\cdots$ Vérification : $\cdots\cdots$

Exercice 3 ***Calculer une intégrale, étape par étape*** **(T^{le}).**

1. Compléter : une primitive de $f(x) = 2x + 1$ est $\mathrm{F}(x) = \cdots\cdots$

donc $\int_1^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x = \Big[\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]_1^3 = \mathrm{F}(3) - \mathrm{F}(1) = \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

2. Retrouver ce résultat par un calcul d'aire : le domaine sous la droite $y = 2x+1$ entre $x = 1$ et $x = 3$ est un trapèze.

3. Calculer :
   a) $\mathrm{I} = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   b) $\mathrm{J} = \int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   c) $\mathrm{K} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   d) $\mathrm{L} = \int_0^2 \left(x^2 - 3x\right)\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4. Interpréter le signe de L.

. . . .

. . . .

Exercice 4 ***Utiliser les propriétés*** **(T^{le}).** On sait que $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ et $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$.

1. Calculer $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_5^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^2 \left(3f(x)+1\right)\mathrm{d}x$.

2. Calculer la valeur moyenne de f sur $[0\ ;\ 5]$.

. . . .

3. Sans calculer d'intégrale, comparer $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$. Vérifier ensuite par le calcul.

Exercice 5 *Aire entre deux courbes* (T^{le}). Soient $f(x) = x + 2$ et $g(x) = x^2$.

1. Montrer que $f(x) - g(x) = -(x-2)(x+1)$ et en déduire que $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[-1\ ;\ 2]$.

2. L'aire du domaine compris entre les deux courbes sur $[-1\ ;\ 2]$ vaut $\displaystyle\int_{-1}^{2} \big(f(x) - g(x)\big)\mathrm{d}x$. Calculer cette aire.

Exercice 6 *Problème en contexte : vidange d'une cuve* (T^{le}). Une cuve se vide. Le débit d'écoulement, en litres par minute, à l'instant t (en minutes) est $d(t) = 20\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$, pour $t \geqslant 0$. Le volume écoulé entre les instants 0 et T est $\mathrm{V(T)} = \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} d(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\mathrm{D}(t) = -100\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ est une primitive de d.

   .....

   .....

2. Calculer le volume écoulé pendant les dix premières minutes (arrondir au dixième de litre).

3. En déduire le débit moyen sur ces dix minutes.

   .....

4. Calculer $\lim\limits_{\mathrm{T}\to+\infty} \mathrm{V(T)}$. Que représente cette limite ?

Exercice 7 ***Problème en contexte : de la vitesse à la distance*** **(*T^le*).** Un mobile a pour vitesse, en mètres par seconde, $v(t) = -0{,}5t^2 + 4t$ pour $t \in [0\ ;\ 8]$ (en secondes). La distance parcourue entre les instants 0 et 8 est $\displaystyle\int_0^8 v(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que $v(t) \geqslant 0$ sur $[0\ ;\ 8]$ et déterminer l'instant où la vitesse est maximale.

2. Calculer la distance parcourue (valeur exacte puis arrondie au décimètre).

3. En déduire la vitesse moyenne sur le trajet.

.....

.....

Exercice 8 ***QCM*** **(*T^le*).** Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. Une primitive de $x \mapsto x^3$ est :

   A. $3x^2$ **B.** $\dfrac{x^4}{4}$ **C.** x^4 **D.** $4x^4$

2. $\displaystyle\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x$ vaut :

   A. 2 **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** 0

3. Si $f \leqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$:

   A. est l'aire du domaine entre la courbe et l'axe **B.** est positive

   C. est nulle **D.** est l'opposé de l'aire du domaine entre la courbe et l'axe

4. Une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ est :

A. $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ **B.** e^{2x} **C.** $2\mathrm{e}^{2x}$ **D.** e^{x^2}

Exercice 9 ***Vrai ou faux ?.*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

B. Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

C. Si F est une primitive de f, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b)$.

D. Si $f \geqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$ (avec $a < b$), alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

E. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

F. $\displaystyle\int_3^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour toute fonction f continue.

G. La valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$ est $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

H. $\displaystyle\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 4$.