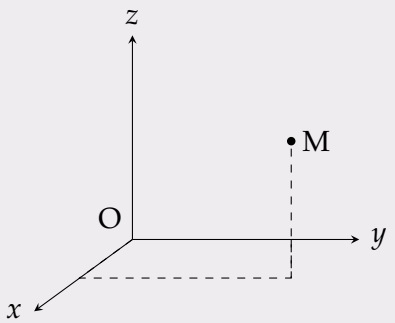
La géométrie dans l'espace

Dans l'espace, on repère un point non plus par deux coordonnées, mais par trois : $(x\ ;\ y\ ;\ z)$. La bonne nouvelle, c'est que les outils du plan se prolongent presque tels quels : coordonnées d'un vecteur, distance, milieu, produit scalaire. Il suffit d'ajouter une troisième coordonnée partout. Le produit scalaire dans l'espace reste l'outil clé pour prouver qu'une droite est perpendiculaire à une autre. La difficulté est surtout de bien visualiser la figure et de ne pas oublier la coordonnée z.

Prérequis : Repérage, Produit scalaire. **Pour s'entraîner :** Exercices : géométrie dans l'espace.

Propriété 1 (Repérage dans l'espace, T^le)

Un repère de l'espace est constitué d'une origine O et de trois axes. Tout point M est repéré par trois coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$: x et y situent le point « au sol », z donne la hauteur.



Exercice 1 *Lire et placer des points dans un cube (T^{le})* ABCDEFGH est un cube d'arête 1 : la face ABCD est « au sol », et les sommets E, F, G, H sont situés respectivement au-dessus de A, B, C, D. On se place dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Compléter les coordonnées des sommets : A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), D(...), E(...), C(...), F(...), G(...), H(...).
2. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [EG]. Où se situe ce point sur le cube ?
3. Le point M a pour coordonnées $\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$. Sur quelle arête du cube se trouve-t-il ? Préciser sa position.
4. Déterminer les coordonnées du centre Ω du cube.

Propriété 2 (Vecteurs et colinéarité, T^le)

Pour $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

Deux vecteurs sont **colinéaires** lorsque l'un est un multiple de l'autre : $\vec{u} = k\,\vec{v}$.

Exemple. Avec $A(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$ et $B(3\ ;\ -1\ ;\ 4)$: $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{v} = 2\,\vec{u}$.

Exercice 2 *Coordonnées de vecteurs et colinéarité (T^{le})*

1. On donne $A(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$ et $B(4\ ;\ 0\ ;\ 5)$. Compléter : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-(\ldots) \\ \ldots - \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$.
2. On donne $C(1\ ;\ 2\ ;\ 0)$ et $D(5\ ;\ 4\ ;\ 4)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$, puis montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CD) ?
3. Les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
4. Les points $P(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$, $Q(3\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et $R(7\ ;\ 3\ ;\ 5)$ sont-ils alignés ?
5. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Propriété 3 (Distance et milieu, T^le)

Dans un repère orthonormé :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\ ;\ \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Exemple. Avec A(1 ; 0 ; 2) et B(3 ; −1 ; 4) : $AB = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$. Le milieu de [AB] est $I\left(2 \ ; \ -\frac{1}{2} \ ; \ 3\right)$.

Exercice 3 *Distance et milieu* (T^{le}) Le repère est orthonormé.

1. On donne A(2 ; −1 ; 3) et B(4 ; 0 ; 5). Calculer la distance AB, puis les coordonnées du milieu I de [AB].
2. Dans le cube d'arête 1 de l'exercice 1, calculer la longueur AC de la diagonale d'une face, puis la longueur AG de la grande diagonale du cube.
3. On donne A(0 ; 0 ; 0), B(2 ; 2 ; 1) et C(1 ; −2 ; 2). Calculer AB, AC et BC, puis préciser la nature du triangle ABC.

Propriété 4 (Produit scalaire dans l'espace, T^{le})

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Comme dans le plan, deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemple. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 2 \times (-1) + (-1) \times 1 = 3 - 2 - 1 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux.

Méthode : montrer une orthogonalité dans l'espace

1. Calculer les coordonnées des vecteurs (différence des coordonnées des points, sans oublier z).
2. Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
3. Conclure : si le résultat est nul, les vecteurs (donc les droites) sont orthogonaux.

Exercice 4 *Produit scalaire et orthogonalité* (T^{le}) Le repère est orthonormé.

1. Dans chaque cas, dire si les vecteurs sont orthogonaux :

   a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

   c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ d) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

2. Déterminer le réel t pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}t\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.
3. Dans le cube d'arête 1 de l'exercice 1, les droites (AG) et (BH) sont-elles orthogonales ? Et les droites (AC) et (BD) ?

Exercice 5 *Problème en contexte : nature d'un triangle* (T^{le}) Dans un repère orthonormé, on donne A(1 ; 0 ; 2), B(3 ; 2 ; 2) et C(2 ; −1 ; 4).

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. En déduire la nature du triangle ABC.
4. Calculer AB, AC et BC, puis vérifier le résultat de la question 3 avec le théorème de Pythagore.
5. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 6 *Problème en contexte : une pyramide* (T^{le}) Dans un repère orthonormé (unité : le mètre), on considère la pyramide SABCD avec A(0 ; 0 ; 0), B(4 ; 0 ; 0), C(4 ; 4 ; 0), D(0 ; 4 ; 0) et S(2 ; 2 ; 3).

1. Montrer que ABCD est un carré.
2. Déterminer les coordonnées du centre I de la base ABCD.
3. Montrer que la droite (SI) est orthogonale aux droites (AC) et (BD). Que représente le segment [SI] pour la pyramide ? Calculer sa longueur.
4. Calculer la longueur de l'arête [SA]. Que peut-on dire des quatre arêtes latérales ?
5. Calculer le volume de la pyramide, sachant que le volume d'une pyramide est $\frac{1}{3} \times$ aire de la base $\times$ hauteur.

⚠ Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Oublier la coordonnée z	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$	ajouter $z_B - z_A$
Oublier z^2 dans la distance	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$	ajouter $(z_B - z_A)^2$
Conclure colinéaire avec un seul k	« $-3 = 2k$ suffit »	vérifier k sur les trois coordonnées
Confondre orthogonal et colinéaire	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ donc colinéaires	nul $\longrightarrow$ orthogonaux

Exercice 7 *QCM (T^{le})* Le repère est orthonormé. Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. On donne A(1 ; 2 ; 3) et B(4 ; 0 ; 3). Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

   A. $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ **B.** $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ **C.** $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ **D.** $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. La distance entre l'origine O et le point M(3 ; −4 ; 12) vaut :

   A. 13 **B.** 5 **C.** 19 **D.** 169

3. Le produit scalaire $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ vaut :

   A. 10 **B.** $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$ **C.** 6 **D.** −6

4. Le milieu du segment [AB] avec A(1 ; 2 ; 3) et B(3 ; 6 ; −1) a pour coordonnées :

   A. (4 ; 8 ; 2) **B.** (2 ; 4 ; 1) **C.** (1 ; 2 ; −2) **D.** (2 ; 4 ; 2)

Exercice 8 *Vrai ou faux ?* Le repère est orthonormé. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Dans l'espace, un point est repéré par trois coordonnées.

B. Deux vecteurs orthogonaux sont colinéaires.

C. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

D. La distance AB se calcule avec les seules coordonnées x et y des points A et B.

E. Si $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues.

F. Le milieu de [AB] a pour coordonnées la somme des coordonnées de A et de B.

G. Dans un cube d'arête 1, la grande diagonale mesure $\sqrt{2}$.

H. Les vecteurs $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche ***Que faire quand je bloque ?***
Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche ***Mémorisation et sciences cognitives****.*
Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton ***Carnet d'erreurs****.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. Les trois axes portent les arêtes [AB], [AD] et [AE] : D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), C(1 ; 1 ; 0), F(1 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1). La coordonnée z vaut 0 pour les sommets du sol et 1 pour ceux du dessus.
2. $\text{I}\left(\frac{0+1}{2} ; \frac{0+1}{2} ; \frac{1+1}{2}\right) = \text{I}\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$. C'est le centre de la face du dessus EFGH, puisque [EG] en est une diagonale.
3. $x = 1$ et $z = 0$: le point est sur l'arête [BC] (les points B(1 ; 0 ; 0) et C(1 ; 1 ; 0) ont ces mêmes coordonnées x et z). Comme $y = \frac{1}{2}$, M est le milieu de [BC].
4. Le centre du cube est le milieu de la grande diagonale [AG] : $\Omega\left(\frac{0+1}{2} ; \frac{0+1}{2} ; \frac{0+1}{2}\right) = \Omega\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-(-1) \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. $\overrightarrow{\text{CD}}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 4-2 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{\text{CD}} = 2\overrightarrow{\text{AB}}$ (chaque coordonnée est doublée) : les vecteurs sont colinéaires. Les droites (AB) et (CD) ont donc la même direction : elles sont parallèles (ou confondues).
3. On cherche un réel k tel que $\vec{b} = k\vec{a}$. Avec la première coordonnée, $-3 = 2k$, soit $k = -\frac{3}{2}$. On vérifie sur les deux autres : $-\frac{3}{2} \times 4 = -6$ ✓ et $-\frac{3}{2} \times (-2) = 3$ ✓. Toutes les coordonnées concordent, donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.
4. $\overrightarrow{\text{PQ}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{PR}}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{\text{PR}} = 3\overrightarrow{\text{PQ}}$: les vecteurs sont colinéaires et ont le point P en commun, donc les points P, Q et R sont alignés.
5. Avec les deux premières coordonnées, $\vec{v} = 2\vec{u}$ semble convenir ($2 = 2 \times 1$ et $4 = 2 \times 2$), mais la troisième donne $2 \times 3 = 6 \neq 5$. Il n'existe pas de réel k qui convienne pour les trois coordonnées : les vecteurs ne sont **pas** colinéaires. Il faut toujours vérifier k sur les trois coordonnées.

Corrigé de l'exercice 3.

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. Donc $AB = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$.

   Le milieu est $I\left(\frac{2+4}{2} ; \frac{-1+0}{2} ; \frac{3+5}{2}\right) = I\left(3 ; -\frac{1}{2} ; 4\right)$.

2. A(0 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0) et G(1 ; 1 ; 1). Donc $AC = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$ et $AG = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$. La grande diagonale d'un cube d'arête a mesure $a\sqrt{3}$, la diagonale d'une face $a\sqrt{2}$.

3. $AB = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$; $AC = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}$, donc $BC = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Comme AB = AC, le triangle est isocèle en A. De plus, $AB^2 + AC^2 = 9+9 = 18 = BC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en A. Le triangle ABC est donc **rectangle et isocèle en** A.

Corrigé de l'exercice 4.

1.

   a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times 3 + 2\times(-1) + (-1)\times 1 = 3-2-1 = 0$: orthogonaux.

   b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times(-1) + 0\times 3 + 1\times 2 = -2+0+2 = 0$: orthogonaux.

   c) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times 1 + 1\times(-2) + 1\times 1 = 1-2+1 = 0$: orthogonaux.

   d) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 1 + 1\times 2 + (-2)\times 1 = 3+2-2 = 3 \neq 0$: non orthogonaux.

2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3t + 2\times 1 + (-1)\times 4 = 3t - 2$. Les vecteurs sont orthogonaux lorsque $3t-2=0$, soit $t = \frac{2}{3}$.

3. $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH} = -1+1+1 = 1 \neq 0$: les grandes diagonales (AG) et (BH) ne sont pas orthogonales. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = -1+1+0 = 0$: les diagonales (AC) et (BD) de la face ABCD sont orthogonales, ce qui est bien connu pour un carré.

Corrigé de l'exercice 5.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\2-0\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-1\\-1-0\\4-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 1 + 2\times(-1) + 0\times 2 = 2-2+0 = 0$.

3. Le produit scalaire est nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux : le triangle ABC est **rectangle en** A.

4. $AB = \sqrt{2^2+2^2+0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $AC = \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{6}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$, donc $BC = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$. On a $AB^2+AC^2 = 8+6 = 14 = BC^2$: l'égalité de Pythagore est vérifiée, ce qui confirme que le triangle est rectangle en A, avec [BC] pour hypoténuse. ✓

5. Les côtés de l'angle droit sont AB et AC : $\mathcal{A} = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ unités d'aire.

Corrigé de l'exercice 6.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ABCD est un parallélogramme. De plus, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 4\times0+0\times4+0\times0 = 0$: l'angle en A est droit, c'est un rectangle. Enfin AB = AD = 4 : c'est un carré.

2. I est le milieu de la diagonale [AC] : $I\left(\dfrac{0+4}{2}\ ;\ \dfrac{0+4}{2}\ ;\ \dfrac{0+0}{2}\right) = I(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$.

3. $\overrightarrow{SI}\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$. On calcule $\overrightarrow{SI}\cdot\overrightarrow{AC} = 0+0+0 = 0$ et $\overrightarrow{SI}\cdot\overrightarrow{BD} = 0+0+0 = 0$: la droite (SI) est orthogonale aux deux diagonales de la base. Elle est donc perpendiculaire au plan de la base (on admet qu'une droite orthogonale à deux droites sécantes d'un plan est perpendiculaire à ce plan) : [SI] est la **hauteur** de la pyramide, et $SI = \sqrt{0^2+0^2+(-3)^2} = 3$ m.

4. $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-3\end{pmatrix}$, donc $SA = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17} \approx 4{,}12$ m. Par symétrie de la figure (S est au-dessus du centre du carré), les quatre arêtes latérales SA, SB, SC et SD ont la même longueur $\sqrt{17}$: la pyramide est régulière. Vérification pour SC : $\overrightarrow{SC}\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$, $SC = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$. ✓

5. L'aire de la base est $4\times4 = 16$ m^2 et la hauteur vaut 3 m : $V = \dfrac{1}{3}\times16\times3 = 16$ m^3.

Corrigé de l'exercice 7.

1. **Réponse C.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-1\\0-2\\3-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$.

- A : soustraction dans le mauvais sens $(A - B$ au lieu de $B - A)$, c'est $\overrightarrow{BA}$.
- B : les coordonnées ont été additionnées au lieu d'être soustraites.
- D : la coordonnée z a été oubliée ; dans l'espace, un vecteur a trois coordonnées, même si l'une est nulle.

2. **Réponse A.** $OM = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$.
   - B (5) : la coordonnée z a été oubliée, $\sqrt{9 + 16} = 5$.
   - C (19) : somme des valeurs absolues des coordonnées, sans carrés ni racine.
   - D (169) : la racine carrée a été oubliée, $169 = OM^2$.
3. **Réponse D.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-2) \times 3 = 2 - 2 - 6 = -6$.
   - A (10) : tous les produits ont été comptés positifs $(2 + 2 + 6)$.
   - B : les coordonnées ont été multipliées deux à deux sans être additionnées ; le produit scalaire est un nombre.
   - C (6) : erreur de signe sur le dernier produit, $(-2) \times 3 = -6$ et non $+6$.
4. **Réponse B.** $I\left(\frac{1+3}{2} \ ; \ \frac{2+6}{2} \ ; \ \frac{3+(-1)}{2}\right) = (2 \ ; \ 4 \ ; \ 1)$.
   - A : les coordonnées ont été additionnées sans être divisées par 2.
   - C : c'est la demi-différence $\frac{B - A}{2}$, pas la demi-somme.
   - D : erreur de signe sur z, $\frac{3+(-1)}{2} = 1$ et non $\frac{3+1}{2} = 2$.

Corrigé de l'exercice 8.

A. Vrai. Il faut trois nombres $(x \ ; \ y \ ; \ z)$: deux pour situer le point « au sol » et un pour la hauteur.

B. Faux. Deux vecteurs colinéaires ont la même direction ; deux vecteurs orthogonaux (non nuls) ont des directions perpendiculaires. Par exemple, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ sont orthogonaux et non colinéaires.

C. Vrai. C'est le critère d'orthogonalité, valable dans l'espace comme dans le plan.

D. Faux. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$: oublier $(z_B - z_A)^2$ donne une distance trop courte, sauf si A et B ont la même cote z.

E. Vrai. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) ont la même direction : elles sont parallèles, ou confondues si elles ont un point commun.

F. Faux. Ce sont les *demi-sommes* : $\left(\frac{x_A + x_B}{2} \ ; \ \frac{y_A + y_B}{2} \ ; \ \frac{z_A + z_B}{2}\right)$. Avec la somme seule, le milieu de [AB] pour $A(0 \ ; \ 0 \ ; \ 0)$ et $B(2 \ ; \ 2 \ ; \ 2)$ serait B lui-même, ce qui est absurde.

G. Faux. La grande diagonale relie deux sommets opposés du cube, par exemple A(0 ; 0 ; 0) et G(1 ; 1 ; 1) : elle mesure $\sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. C'est la diagonale d'une *face* qui mesure $\sqrt{2}$.

H. Vrai. $\vec{i} \cdot \vec{k} = 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 = 0$. Ce sont deux vecteurs du repère orthonormé, portés par deux axes perpendiculaires.