La géométrie dans l'espace — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur la géométrie dans l'espace. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver les formules de coordonnées, de distance, de milieu et de produit scalaire. Le repère est toujours orthonormé. N'oublie jamais la troisième coordonnée.

Exercice 1 ***Lire et placer des points dans un cube*** **(*T^le*).** ABCDEFGH est un cube d'arête 1 : la face ABCD est « au sol », et les sommets E, F, G, H sont situés respectivement au-dessus de A, B, C, D. On se place dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Compléter les coordonnées des sommets :
   A(0 ; 0 ; 0) B(1 ; 0 ; 0) D(.....) E(.....)
   C(.....) F(.....) G(.....) H(.....)
2. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [EG]. Où se situe ce point sur le cube ?

3. Le point M a pour coordonnées $\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$. Sur quelle arête du cube se trouve-t-il ? Préciser sa position.

   .....

   .....

4. Déterminer les coordonnées du centre Ω du cube.

Exercice 2 ***Coordonnées de vecteurs et colinéarité*** **(*T^le*).**

1. On donne A(2 ; −1 ; 3) et B(4 ; 0 ; 5). Compléter : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-(\ldots\ldots) \\ \ldots\ldots - \ldots\ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$.

2. On donne C(1 ; 2 ; 0) et D(5 ; 4 ; 4). Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$, puis montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (CD) ?

3. Les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

4. Les points P(1 ; 0 ; 2), Q(3 ; 1 ; 3) et R(7 ; 3 ; 5) sont-ils alignés ?

5. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 3 ***Distance et milieu*** **(T^{le}).**

1. On donne A(2 ; −1 ; 3) et B(4 ; 0 ; 5). Calculer la distance AB, puis les coordonnées du milieu I de [AB].

2. Dans le cube d'arête 1 de l'exercice 1, calculer la longueur AC de la diagonale d'une face, puis la longueur AG de la grande diagonale du cube.

3. On donne A(0 ; 0 ; 0), B(2 ; 2 ; 1) et C(1 ; −2 ; 2). Calculer AB, AC et BC, puis préciser la nature du triangle ABC.

Exercice 4 ***Produit scalaire et orthogonalité*** **(T^{le}).**

1. Dans chaque cas, dire si les vecteurs sont orthogonaux :
   a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$: $\vec{u}\cdot\vec{v} =$ .....
   b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$: $\vec{u}\cdot\vec{v} =$ .....
   c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$: $\vec{u}\cdot\vec{v} =$ .....
   d) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$: $\vec{u}\cdot\vec{v} =$ .....
2. Déterminer le réel t pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}t\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

3. Dans le cube d'arête 1 de l'exercice 1, les droites (AG) et (BH) sont-elles orthogonales ? Et les droites (AC) et (BD) ?

Exercice 5 ***Problème en contexte : nature d'un triangle*** (T^{le})**.** Dans un repère orthonormé, on donne A(1 ; 0 ; 2), B(3 ; 2 ; 2) et C(2 ; −1 ; 4).

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\\ \ldots\ldots\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\\ \ldots\ldots\end{pmatrix}$

2. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

. . . . . .

3. En déduire la nature du triangle ABC.

. . . . . .

. . . . . .

4. Calculer AB, AC et BC, puis vérifier le résultat de la question 3 avec le théorème de Pythagore.

5. Calculer l'aire du triangle ABC.

. . . . . .

. . . . . .

Exercice 6 ***Problème en contexte : une pyramide*** **(*T^le*).** Dans un repère orthonormé (unité : le mètre), on considère la pyramide SABCD avec A(0 ; 0 ; 0), B(4 ; 0 ; 0), C(4 ; 4 ; 0), D(0 ; 4 ; 0) et S(2 ; 2 ; 3).

1. Montrer que ABCD est un carré.

2. Déterminer les coordonnées du centre I de la base ABCD.

   . . . . . .

   . . . . . .

3. Montrer que la droite (SI) est orthogonale aux droites (AC) et (BD). Que représente le segment [SI] pour la pyramide ? Calculer sa longueur.

4. Calculer la longueur de l'arête [SA]. Que peut-on dire des quatre arêtes latérales ?

5. Calculer le volume de la pyramide, sachant que le volume d'une pyramide est $\frac{1}{3} \times$ aire de la base $\times$ hauteur.

   . . . . . .

   . . . . . .

Exercice 7 ***QCM*** **(*T^le*).** Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. On donne A(1 ; 2 ; 3) et B(4 ; 0 ; 3). Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

A. $\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ **B.** $\begin{pmatrix}5\\2\\6\end{pmatrix}$ **C.** $\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ **D.** $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

2. La distance entre l'origine O et le point M$(3\ ;\ -4\ ;\ 12)$ vaut :

   A. 13 **B.** 5 **C.** 19 **D.** 169

3. Le produit scalaire $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\cdot\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ vaut :

   A. 10 **B.** $\begin{pmatrix}2\\-2\\-6\end{pmatrix}$ **C.** 6 **D.** -6

4. Le milieu du segment [AB] avec A$(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et B$(3\ ;\ 6\ ;\ -1)$ a pour coordonnées :

   A. $(4\ ;\ 8\ ;\ 2)$ **B.** $(2\ ;\ 4\ ;\ 1)$ **C.** $(1\ ;\ 2\ ;\ -2)$ **D.** $(2\ ;\ 4\ ;\ 2)$

Exercice 8 ***Vrai ou faux ?.*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Dans l'espace, un point est repéré par trois coordonnées.

B. Deux vecteurs orthogonaux sont colinéaires.

C. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

D. La distance AB se calcule avec les seules coordonnées x et y des points A et B.

E. Si $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues.

F. Le milieu de [AB] a pour coordonnées la somme des coordonnées de A et de B.

G. Dans un cube d'arête 1, la grande diagonale mesure $\sqrt{2}$.

H. Les vecteurs $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.