Les fonctions

Une fonction est une « machine » mathématique qui, à chaque nombre d'un ensemble de départ, associe un unique nombre appelé image. Les fonctions sont au cœur du programme de seconde : elles servent à modéliser des situations concrètes, à analyser des courbes et à résoudre des problèmes. La principale difficulté vient du fait que les fonctions se représentent dans trois registres différents (formule algébrique, tableau de valeurs, graphique) que les élèves ne relient pas spontanément entre eux.

Prérequis : Calcul littéral, Repérage. **Pour s'entraîner :** Exercices : fonctions.

Définitions 1 (Vocabulaire, 3e–2de)

Fonction : une relation qui, à chaque nombre x d'un ensemble appelé **ensemble de définition**, associe **un unique** nombre noté $f(x)$.
Image : si $f(3) = 7$, on dit que 7 est l'**image** de 3 par la fonction f.
Antécédent : si $f(3) = 7$, on dit que 3 est **un antécédent** de 7 par la fonction f.
Ensemble de définition : l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction est définie. Notation : D_f. Par exemple, pour $f(x) = \dfrac{1}{x}$, on a $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (tout nombre sauf 0).
Courbe représentative : l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ dans un repère du plan. On la note souvent $\mathcal{C}_f$.

*Attention : un nombre admet **une seule image** par une fonction, mais un nombre peut avoir **zéro, un ou plusieurs antécédents**. Par exemple, la fonction « carré » donne $f(3) = 9$ et $f(-3) = 9$: le nombre 9 a deux antécédents (3 et -3), tandis que -4 n'a aucun antécédent.*

*La lettre utilisée pour la variable n'a aucune importance : $f(x) = 2x + 1$, $f(t) = 2t + 1$ et $f(n) = 2n + 1$ désignent exactement la **même fonction**. La variable est un simple « espace réservé » (on parle de variable muette). Seule la règle de calcul compte.*

Exercice 1 *Vocabulaire des fonctions (3e–2de)* Pour chaque situation, donner l'image, l'antécédent et l'écriture avec la notation $f(x)$:

1. « L'image de 5 par f est -2. »
2. « Par la fonction g, le nombre 4 a pour image 11. »
3. « -3 est un antécédent de 8 par la fonction h. »
4. La courbe de la fonction f passe par le point de coordonnées $(2\ ;\ 7)$.
5. $g(-1) = 4$.

6. « Quand $x = 0$, la fonction f donne 3. »

Calculer une image à partir d'une formule (2^{de})

Quand une fonction est définie par une formule, on calcule l'image d'un nombre en **remplaçant** x par ce nombre dans la formule.

Exemples Soit $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

- Calculer $f(0)$: $f(0) = 3 \times 0^2 - 2 \times 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$.
- Calculer $f(-2)$:

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3 \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + 1 \\ &= 3 \times 4 - 2 \times (-2) + 1 \\ &= 12 + 4 + 1 = 17 \end{aligned}$$

Attention

Quand on remplace x par un nombre négatif, il faut toujours mettre des parenthèses autour de ce nombre, surtout avant de l'élever au carré. $(-2)^2 = 4$ mais $-2^2 = -4$: cette distinction est cruciale.

Exercice 2 *Calculer des images (2^{de})*

1. Soit $f(x) = 3x - 7$. Calculer :

   a) $f(0)$ b) $f(4)$ c) $f(-2)$ d) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

2. Soit $g(x) = x^2 - 4$. Calculer :

   a) $g(0)$ b) $g(3)$ c) $g(-2)$ d) $g(-5)$

3. Soit $h(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$. Calculer :

   a) $h(0)$ b) $h(5)$ c) $h(-1)$

   Pourquoi ne peut-on pas calculer $h(3)$?

Propriété 1 (Les trois registres d'une fonction, 2de)

Une même fonction peut être décrite de trois façons.

Registre algébrique : la formule, par exemple $f(x) = 2x^2 - 3$.

Registre numérique : un tableau de valeurs qui liste des couples $(x \ ; \ f(x))$.

Registre graphique : la courbe représentative dans un repère.

Savoir **passer d'un registre à l'autre** est la compétence centrale sur les fonctions. À partir d'une formule, on peut calculer des images pour remplir un tableau de valeurs. À partir d'un tableau, on peut placer des points dans un repère pour tracer la courbe. Inversement, à partir de la courbe, on peut lire graphiquement une image ou un antécédent.

*Une fonction n'est pas seulement une « machine à calculer » qui avale un nombre et en recrache un autre. C'est aussi un **objet mathématique** que l'on peut comparer à d'autres fonctions, additionner, composer, dériver, etc. Ce passage de la vision « processus » à la vision « objet » est un saut conceptuel important en seconde.*

Propriété 2 (Tableau de valeurs, 3e–2de)

Un **tableau de valeurs** regroupe plusieurs couples $(x \ ; \ f(x))$. Il permet de passer du registre algébrique au registre numérique et prépare le tracé de la courbe.

Exemples Pour $f(x) = 2x - 1$:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

Chaque colonne donne un couple : le point $(-2 \ ; \ -5)$ est sur la courbe de f, le point $(-1 \ ; \ -3)$ aussi, etc.

Le tableau de valeurs ne donne qu'un échantillon de la fonction : il ne montre pas ce qui se passe entre les valeurs choisies. Deux fonctions différentes peuvent avoir le même tableau de valeurs pour ces quelques x.

Exercice 3 *Tableau de valeurs (3^e–2^{de})* Soit $h(x) = x^2 - 2x - 3$.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$h(x)$							

2. Quelle est l'image de 0 par h ?
3. Quels sont les antécédents de 0 par h (d'après le tableau) ?
4. D'après le tableau, sur quel(s) intervalle(s) la fonction h semble-t-elle croissante ? décroissante ?
5. En déduire : la fonction h est-elle croissante sur $[-2\ ;\ 4]$? Justifier.

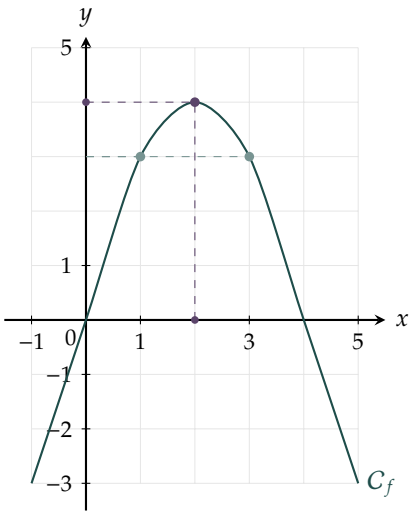
Lire une image et un antécédent sur un graphique (3^e–2^{de})

La courbe représentative d'une fonction traduit visuellement la relation $x \mapsto f(x)$. On peut y lire deux types d'informations.

Lire l'image de a : on part de $x = a$ sur l'axe des abscisses, on monte (ou descend) verticalement jusqu'à la courbe, puis on lit l'ordonnée correspondante sur l'axe des ordonnées.

Trouver les antécédents de b : on part de $y = b$ sur l'axe des ordonnées, on trace une horizontale, et on lit les abscisses de tous les points d'intersection avec la courbe.

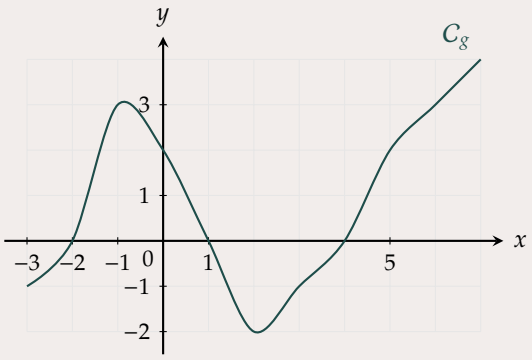
Exemples Soit f la fonction dont la courbe est tracée ci-dessous.



- **Image de 2 :** on part de $x = 2$, on monte jusqu'à la courbe, puis on lit sur l'axe des ordonnées : $f(2) = 4$ (pointillés foncés).
- **Antécédents de 3 :** on part de $y = 3$, on trace l'horizontale : elle coupe la courbe en deux points d'abscisses 1 et 3. Donc $f(x) = 3$ a deux solutions : $x = 1$ et $x = 3$ (pointillés clairs).

*Pour lire une image, on part de l'axe **horizontal** ; pour trouver des antécédents, on part de l'axe **vertical**. Les élèves inversent souvent ces deux démarches.*

Exercice 4 *Lecture graphique : images* (3^e–2^{de}) On considère la fonction g dont la courbe $\mathcal{C}_g$ est représentée ci-dessous.



Par lecture graphique, déterminer :

a) $g(-3)$ b) $g(-1)$ c) $g(0)$ d) $g(2)$ e) $g(4)$ f) $g(6)$

Exercice 5 *Lecture graphique : antécédents et résolutions* (2^{de}) En utilisant le graphique de l'exercice précédent, résoudre graphiquement chaque équation :

a) $g(x) = 0$ b) $g(x) = 3$ c) $g(x) = -2$ d) $g(x) = 5$

Puis répondre aux questions suivantes :

5. Combien le nombre 0 a-t-il d'antécédents par g ?
6. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction g est-elle strictement positive (c'est-à-dire $g(x) > 0$) ?

Propriété 3 (Variations d'une fonction, 2^{de})

Fonction croissante sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ **:** quand x augmente, $f(x)$ augmente. Autrement dit : si $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Sur le graphique, la courbe **monte** de gauche à droite.

Fonction décroissante sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ **:** quand x augmente, $f(x)$ diminue. Autrement dit : si $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Sur le graphique, la courbe **descend** de gauche à droite.

Maximum local : la plus grande valeur de $f(x)$ sur un intervalle. La fonction est croissante avant et décroissante après.

Minimum local : la plus petite valeur de $f(x)$ sur un intervalle. La fonction est décroissante avant et croissante après.

On résume les variations dans un **tableau de variations**. Exemple pour une fonction f définie sur $[-3\ ;\ 5]$, croissante sur $[-3\ ;\ 1]$ et décroissante sur $[1\ ;\ 5]$, avec $f(-3) = -2$, $f(1) = 4$ et $f(5) = 0$:

x	-3		1		5
$f(x)$	-2	↗	4	↘	0

On lit : f admet un **maximum** de 4 sur $[-3\ ;\ 5]$, atteint en $x = 1$.

Attention à la confusion courante entre « la fonction est positive » (les images $f(x) \geqslant 0$, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses) et « la fonction est croissante » (les images augmentent quand x augmente, la courbe monte). Ces deux propriétés sont indépendantes.

Exercice 6 *Tableau de variations (2^{de})* En utilisant le graphique de l'exercice 4.

1. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction g est-elle croissante ?
2. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction g est-elle décroissante ?
3. Dresser le tableau de variations de g sur $[-3\ ;\ 7]$.
4. Quel est le maximum de g sur $[-3\ ;\ 7]$? En quelle valeur de x est-il atteint ?
5. Quel est le minimum de g sur $[-3\ ;\ 7]$? En quelle valeur de x est-il atteint ?

Exercice 7 *Fonction en contexte (2^{de})* On remplit une piscine avec un tuyau. Le volume d'eau V (en litres) en fonction du temps t (en heures) depuis le début du remplissage est donné par la formule :

$$\mathrm{V}(t) = 50t + 200$$

1. Quel est le volume d'eau dans la piscine au début du remplissage ($t = 0$) ?
2. Quel est le volume d'eau après 3 heures ?
3. Au bout de combien de temps la piscine contiendra-t-elle 700 litres ?
4. La fonction V est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.
5. Cette modélisation a-t-elle un sens pour $t = -5$? Expliquer.

On considère maintenant une deuxième situation. Un réservoir contient 60 litres d'eau. Un robinet fuit et perd 0,5 litre par minute. Le volume d'eau restant R (en litres) en fonction du temps t (en minutes) est :

$$\mathrm{R}(t) = 60 - 0{,}5t$$

6. Quel volume d'eau reste-t-il après 20 minutes ?

7. Au bout de combien de temps le réservoir sera-t-il vide ?
8. La fonction R est-elle croissante ou décroissante ? Comparer avec la fonction V de la première situation.

⚠ Erreurs classiques sur les fonctions

Erreur	Exemple faux	Correction
Confondre image et antécédent	« $f(3) = 7$ donc 7 est un antécédent de 3 »	7 est l'**image** de 3 ; 3 est un **antécédent** de 7
Confondre « croissante » et « positive »	« f est positive sur $[0\ ;\ 5]$ donc f est croissante »	Ce sont deux propriétés **indépendantes** : une fonction peut être positive et décroissante
Oublier les parenthèses au carré	$f(-3) = (-3)^2 = -9$	$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$, pas -9
Lire image/antécédent dans le mauvais sens	Pour trouver l'image de 2, tracer $y = 2$	Pour l'image de 2, partir de $x = 2$ (axe **horizontal**)
Croire qu'un nombre a toujours un antécédent	« $f(x) = 10$ a forcément une solution »	Un nombre peut ne pas avoir d'antécédent si la courbe n'atteint pas cette ordonnée
Confondre maximum et image	« Le maximum de f est en $x = 3$ »	Le maximum est la **valeur** $f(3)$, atteint **en** $x = 3$
Croire que la lettre change la fonction	« $f(x) = 2x + 1$ et $f(t) = 2t + 1$ sont deux fonctions différentes »	C'est la **même** fonction ; la lettre de la variable est muette

Exercice 8 *QCM (2^{de})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. On sait que $f(3) = 7$. Quelle affirmation est correcte ?

   A. 3 est l'image de 7 par f **B.** 3 est un antécédent de 7 par f

   C. La courbe de f passe par $(7\ ;\ 3)$ **D.** f vaut $\dfrac{7}{3}$

2. Soit $f(x) = x^2 - 1$. L'image de -3 par f est :

   A. -10 **B.** -7 **C.** 8 **D.** 10

3. Sur un graphique, pour trouver les antécédents de 2 par f, on :

   A. trace la droite $y = 2$ et on lit les abscisses des intersections

B. trace la droite $x = 2$ et on lit l'ordonnée de l'intersection

C. cherche le point d'ordonnée 2 et on lit son ordonnée

D. trace la droite $y = 2$ et on lit les ordonnées des intersections

4. f est **strictement** décroissante sur $[1\ ;\ 5]$ et on sait que $f(2) = 7$. Alors :

   A. $f(4) > 7$ **B.** $f(4) = 7$

   C. $f(1) < f(5)$ **D.** $f(4) < 7$

5. Le tableau de variations d'une fonction f montre qu'elle est croissante sur $[-3\ ;\ 1]$ (de -2 à 4) puis décroissante sur $[1\ ;\ 5]$ (de 4 à 0). Alors :

   A. f a un minimum de 4 en $x = 1$ **B.** f a un maximum de 4 en $x = 1$

   C. f a un minimum de 1 en $x = 4$ **D.** f a un maximum de 1 en $x = 4$

6. On sait que $g(2) = 5$ et $g(4) = 5$. Alors :

   A. g n'est pas une fonction **B.** 2 et 4 sont les images de 5 par g

   C. 2 et 4 sont deux antécédents de 5 par g **D.** g est constante

Exercice 9 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Si $f(2) = 5$, alors le point $(5\ ;\ 2)$ est sur la courbe de f.

B. Une fonction peut associer la même image à deux nombres différents.

C. Si f est **strictement** croissante sur $[0\ ;\ 10]$, alors $f(3) < f(7)$.

D. La fonction $f(x) = x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

E. Si $f(a) = 0$, on dit que a est une racine (ou un zéro) de f.

F. Si la courbe de f passe par $(0\ ;\ 4)$, alors $f(4) = 0$.

G. Pour toute fonction f et tout nombre b, l'équation $f(x) = b$ a au moins une solution.

H. Si f est décroissante sur $[-2\ ;\ 3]$ avec $f(-2) = 6$ et $f(3) = -1$, alors le maximum de f sur $[-2\ ;\ 3]$ est 6.

I. Si la courbe d'une fonction est une droite horizontale, alors ce n'est pas une vraie fonction.

J. Une fonction doit obligatoirement être définie par une formule algébrique.

K. Les fonctions $f(x) = 3x - 1$ et $f(t) = 3t - 1$ sont deux fonctions différentes.

*Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche **Que faire quand je bloque ?***
*Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche **Mémorisation et sciences cognitives**.*

*Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton **Carnet d'erreurs**.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. Image : -2 ; antécédent : 5 ; notation : $f(5) = -2$.
2. Image : 11 ; antécédent : 4 ; notation : $g(4) = 11$.
3. Image : 8 ; antécédent : -3 ; notation : $h(-3) = 8$.
4. Le point $(2\ ;\ 7)$ est sur la courbe, donc $f(2) = 7$. Image : 7 ; antécédent : 2.
5. Image : 4 ; antécédent : -1. En mots : « L'image de -1 par g est 4 », ou encore : « -1 est un antécédent de 4 par g ».
6. Image : 3 ; antécédent : 0 ; notation : $f(0) = 3$.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $f(x) = 3x - 7$:
   a) $f(0) = 3 \times 0 - 7 = -7$.
   b) $f(4) = 3 \times 4 - 7 = 12 - 7 = 5$.
   c) $f(-2) = 3 \times (-2) - 7 = -6 - 7 = -13$.
   d) $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{3} - 7 = 1 - 7 = -6$.
2. $g(x) = x^2 - 4$:
   a) $g(0) = 0^2 - 4 = -4$.
   b) $g(3) = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5$.
   c) $g(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$.
   d) $g(-5) = (-5)^2 - 4 = 25 - 4 = 21$.
3. $h(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$:
   a) $h(0) = \dfrac{2 \times 0 + 1}{0 - 3} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$.
   b) $h(5) = \dfrac{2 \times 5 + 1}{5 - 3} = \dfrac{11}{2}$.
   c) $h(-1) = \dfrac{2 \times (-1) + 1}{-1 - 3} = \dfrac{-1}{-4} = \dfrac{1}{4}$.

   On ne peut pas calculer $h(3)$ car le dénominateur vaut $3 - 3 = 0$, et la division par zéro est impossible. Le nombre 3 n'appartient pas à l'ensemble de définition de h.

Corrigé de l'exercice 3.

1. On calcule chaque image en remplaçant x dans $h(x) = x^2 - 2x - 3$:

- $h(-2) = (-2)^2 - 2 \times (-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$.
- $h(-1) = (-1)^2 - 2 \times (-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$.
- $h(0) = 0^2 - 2 \times 0 - 3 = -3$.
- $h(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$.
- $h(2) = 2^2 - 2 \times 2 - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$.
- $h(3) = 3^2 - 2 \times 3 - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$.
- $h(4) = 4^2 - 2 \times 4 - 3 = 16 - 8 - 3 = 5$.

Tableau complété :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$h(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

2. L'image de 0 par h est $h(0) = -3$.
3. On cherche les valeurs de x pour lesquelles $h(x) = 0$. D'après le tableau, $h(-1) = 0$ et $h(3) = 0$. Donc les antécédents de 0 sont $x = -1$ et $x = 3$.
4. D'après le tableau :
   - de $x = -2$ à $x = 1$, les images diminuent $(5, 0, -3, -4)$: h semble décroissante sur $[-2\ ;\ 1]$;
   - de $x = 1$ à $x = 4$, les images augmentent $(-4, -3, 0, 5)$: h semble croissante sur $[1\ ;\ 4]$.
5. Non, h n'est pas croissante sur $[-2\ ;\ 4]$: elle change de sens de variation en $x = 1$. Elle est d'abord décroissante puis croissante.

Corrigé de l'exercice 4. On lit les ordonnées sur la courbe pour chaque abscisse :

a) $g(-3) = -1$: le point $(-3\ ;\ -1)$ est sur la courbe.

b) $g(-1) = 3$: le point $(-1\ ;\ 3)$ est sur la courbe.

c) $g(0) = 2$: le point $(0\ ;\ 2)$ est sur la courbe.

d) $g(2) = -2$: le point $(2\ ;\ -2)$ est sur la courbe.

e) $g(4) = 0$: le point $(4\ ;\ 0)$ est sur la courbe (la courbe coupe l'axe des abscisses).

f) $g(6) = 3$: le point $(6\ ;\ 3)$ est sur la courbe.

Corrigé de l'exercice 5.

a) $g(x) = 0$: on trace la droite horizontale $y = 0$ (l'axe des abscisses). Elle coupe la courbe en trois points d'abscisses -2, 1 et 4. Donc $g(x) = 0$ a **trois solutions** : $x = -2$, $x = 1$ et $x = 4$.

b) $g(x) = 3$: on trace la droite $y = 3$. Elle coupe la courbe en deux points d'abscisses -1 et 6. Donc $g(x) = 3$ a **deux solutions** : $x = -1$ et $x = 6$.

c) $g(x) = -2$: on trace la droite $y = -2$. Elle coupe la courbe en un seul point d'abscisse 2. Donc $g(x) = -2$ a **une seule solution** : $x = 2$.

d) $g(x) = 5$: on trace la droite $y = 5$. D'après le graphique, la courbe n'atteint jamais l'ordonnée 5 sur l'intervalle $[-3\ ;\ 7]$. Donc $g(x) = 5$ **n'a pas de solution**.

5. Le nombre 0 a **trois antécédents** par g : ce sont -2, 1 et 4 (d'après la question 1).
6. La fonction g est strictement positive quand la courbe est **au-dessus** de l'axe des abscisses. D'après le graphique, c'est le cas sur $]-2\ ;\ 1[$ et sur $]4\ ;\ 7]$.

Corrigé de l'exercice 6. D'après le graphique, la courbe de g monte, puis descend, puis remonte.

1. g est croissante sur $[-3\ ;\ -1]$ (la courbe monte de -1 à 3) et sur $[2\ ;\ 7]$ (la courbe monte de -2 à 4).
2. g est décroissante sur $[-1\ ;\ 2]$ (la courbe descend de 3 à -2).
3. Tableau de variations de g sur $[-3\ ;\ 7]$:

x	-3		-1		2		7
$g(x)$		↗	3	↘		↗	4
	-1				-2		

4. Le maximum de g sur $[-3\ ;\ 7]$ est **4**, atteint en $x = 7$.

   En effet, les deux « sommets » de la courbe sont $g(-1) = 3$ et $g(7) = 4$: c'est 4 la plus grande valeur.

5. Le minimum de g sur $[-3\ ;\ 7]$ est **-2**, atteint en $x = 2$.

   Les deux « creux » sont $g(-3) = -1$ et $g(2) = -2$: c'est -2 la plus petite valeur.

Corrigé de l'exercice 7. **Première situation : la piscine.**

1. Pour $t = 0$: $V(0) = 50 \times 0 + 200 = 200$.

   Au début du remplissage, il y a déjà 200 litres dans la piscine.

2. Pour $t = 3$: $V(3) = 50 \times 3 + 200 = 150 + 200 = 350$.

   Après 3 heures, la piscine contient 350 litres.

3. On cherche t tel que $V(t) = 700$:

$$\begin{aligned} 50t + 200 &= 700 \\ 50t &= 500 && \text{(on soustrait 200)} \\ t &= \frac{500}{50} = 10 && \text{(on divise par 50)} \end{aligned}$$

   La piscine contiendra 700 litres au bout de 10 heures.

Vérification : $V(10) = 50 \times 10 + 200 = 500 + 200 = 700$. ✓

4. La fonction V est **croissante**. En effet, quand t augmente (le temps passe), le terme $50t$ augmente aussi, donc $V(t) = 50t + 200$ augmente. Cela correspond au fait que le volume d'eau augmente au fil du remplissage.

   On peut aussi le montrer par un calcul : si $t_1 < t_2$, alors $50t_1 < 50t_2$, donc $50t_1 + 200 < 50t_2 + 200$, c'est-à-dire $V(t_1) < V(t_2)$.

5. Non, $V(-5) = 50 \times (-5) + 200 = -50$ n'a pas de sens physique : un volume d'eau ne peut pas être négatif. De plus, le temps $t = -5$ signifierait « 5 heures avant le début du remplissage », ce qui n'est pas dans le contexte du problème. La formule n'est valable que pour $t \geqslant 0$.

Deuxième situation : le réservoir.

6. Pour $t = 20$: $R(20) = 60 - 0{,}5 \times 20 = 60 - 10 = 50$.

   Après 20 minutes, il reste 50 litres dans le réservoir.

7. On cherche t tel que $R(t) = 0$:

$$\begin{aligned} 60 - 0{,}5t &= 0 \\ 0{,}5t &= 60 && \text{(on ajoute } 0{,}5t\text{)} \\ t &= \frac{60}{0{,}5} = 120 && \text{(on divise par } 0{,}5\text{)} \end{aligned}$$

   Le réservoir sera vide au bout de 120 minutes (soit 2 heures).

   Vérification : $R(120) = 60 - 0{,}5 \times 120 = 60 - 60 = 0$. ✓

8. La fonction R est **décroissante**. En effet, quand t augmente, le terme $-0{,}5t$ diminue, donc $R(t)$ diminue : l'eau s'écoule progressivement.

   C'est l'inverse de la fonction V qui, elle, est **croissante** (le volume augmente avec le temps). On a ici deux situations de co-variation : dans la première, les deux grandeurs (temps et volume) varient dans le même sens ; dans la seconde, elles varient en sens contraire.

Corrigé de l'exercice 8.

1. **Réponse B.** Si $f(3) = 7$, cela signifie que 3 est un antécédent de 7 par f (et que 7 est l'image de 3).

   - A est faux : c'est l'inverse, 3 n'est pas l'image mais l'antécédent.
   - C est faux : la courbe passe par $(3\ ;\ 7)$, pas $(7\ ;\ 3)$ (inversion des coordonnées).
   - D est faux : f est une fonction, pas un nombre ; $f(3) = 7$ ne signifie pas que « $f = \frac{7}{3}$ ».

2. **Réponse C.** $f(-3) = (-3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$.

   - A (-10) : erreur de priorité, $(-3)^2$ calculé comme $-3^2 = -9$, puis $-9 - 1 = -10$.
   - B (-7) : confusion x^2 avec $2x$, calcul $2 \times (-3) - 1 = -7$.

- D (10) : calcul $(-3)^2 - 1 = 9 - 1$ correct, puis erreur de signe : $9 + 1 = 10$.

3. **Réponse A.** On trace la droite horizontale $y = 2$ et on lit les abscisses des points d'intersection avec la courbe.
   - B : c'est la méthode pour lire l'**image** de 2, pas ses antécédents.
   - C : il faudrait lire l'**abscisse**, pas l'ordonnée.
   - D : on lit les **abscisses**, pas les ordonnées (les ordonnées valent toutes 2).
4. **Réponse D.** f est strictement décroissante sur $[1\ ;\ 5]$, donc si x augmente, $f(x)$ diminue. Comme $4 > 2$ et que les deux nombres sont dans $[1\ ;\ 5]$, on a $f(4) < f(2) = 7$.
   - A : c'est l'inverse ; $f(4) > 7$ correspondrait à une fonction **croissante**.
   - B : cela signifierait que f est constante entre 2 et 4, ce qui contredit le fait qu'elle est strictement décroissante.
   - C : f strictement décroissante implique $f(1) > f(5)$ (les images diminuent), pas $f(1) < f(5)$.
5. **Réponse B.** La fonction passe de -2 à 4 (croissante) puis de 4 à 0 (décroissante). La plus grande valeur est 4, atteinte en $x = 1$: c'est un maximum.
   - A : 4 est un **maximum**, pas un minimum.
   - C : inversion des rôles : le maximum est de **valeur** 4 en $x = 1$, pas « de valeur 1 en $x = 4$ ».
   - D : même confusion que C, avec « maximum » au lieu de « minimum ».
6. **Réponse C.** $g(2) = 5$ et $g(4) = 5$ signifient que 2 et 4 sont deux antécédents de 5 par g.
   - A : une fonction **peut** associer la même image à deux antécédents différents. Cela ne viole pas la définition (chaque x a une **unique** image, mais plusieurs x peuvent partager la même image).
   - B : 2 et 4 sont des **antécédents**, pas des images. 5 est l'image, pas l'antécédent.
   - D : on ne peut pas conclure que g est constante : elle peut varier entre $x = 2$ et $x = 4$.

Corrigé de l'exercice 9.

A. Faux. Si $f(2) = 5$, le point sur la courbe est $(2\ ;\ 5)$ (l'abscisse est le nombre, l'ordonnée est l'image), pas $(5\ ;\ 2)$. C'est une inversion des coordonnées.

B. Vrai. Par exemple, la fonction « carré » donne $f(-3) = 9$ et $f(3) = 9$: les nombres -3 et 3 ont la même image. Cela est parfaitement compatible avec la définition d'une fonction (chaque nombre a **une seule** image, mais rien n'empêche deux nombres d'avoir la même image).

C. Vrai. Si f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 10]$, alors par définition de la croissance stricte, $3 < 7$ (les deux étant dans $[0\ ;\ 10]$) donne $f(3) < f(7)$. Avec une croissance

au sens large, on ne pourrait conclure que $f(3) \leqslant f(7)$: une fonction constante vérifie $f(3) = f(7)$.

D. Faux. La fonction carré n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier. Par exemple, $-3 < -1$ mais $(-3)^2 = 9 > (-1)^2 = 1$: l'ordre est inversé. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

E. Vrai. C'est exactement le vocabulaire standard. On appelle « racine » ou « zéro » d'une fonction tout nombre a tel que $f(a) = 0$. Sur le graphique, les racines correspondent aux abscisses des points où la courbe coupe l'axe des abscisses.

F. Faux. Si la courbe passe par $(0\ ;\ 4)$, cela signifie $f(0) = 4$, pas $f(4) = 0$. C'est une confusion entre image et antécédent : 0 est l'antécédent de 4, pas l'inverse.

G. Faux. Par exemple, la fonction $f(x) = x^2$ ne prend que des valeurs positives ou nulles : l'équation $f(x) = -1$ n'a aucune solution. De même, dans l'exercice 5, l'équation $g(x) = 5$ n'avait pas de solution.

H. Vrai. f est décroissante sur $[-2\ ;\ 3]$: les images diminuent quand x augmente. La plus grande image est donc atteinte au début de l'intervalle, c'est-à-dire en $x = -2$. Le maximum de f sur $[-2\ ;\ 3]$ est bien $f(-2) = 6$.

I. Faux. Une fonction constante, par exemple $f(x) = 3$ pour tout x, est bien une fonction : chaque nombre x a une unique image (qui vaut toujours 3). Sa courbe est une droite horizontale, et cela respecte parfaitement la définition. L'idée qu'une fonction doit « monter ou descendre » est un préjugé courant mais incorrect.

J. Faux. La fonction g des exercices 4 à 6 est définie uniquement par son graphique, sans aucune formule. Une fonction peut aussi être définie par un tableau de valeurs, une description en mots (par exemple : « à chaque personne, on associe son âge »), ou un programme informatique. La formule algébrique n'est qu'un registre de représentation parmi d'autres.

K. Faux. C'est exactement la même fonction : la lettre de la variable (x, t, n, ...) est un simple « espace réservé ». Ce qui définit la fonction, c'est la règle de calcul : « multiplier par 3 puis soustraire 1 ». Que l'on note $f(x) = 3x - 1$ ou $f(t) = 3t - 1$, on décrit la même opération.