Fonctions trigonométriques

Au collège, le cosinus et le sinus sont des rapports de longueurs dans un triangle rectangle : ils n'existent que pour un angle aigu. En terminale, on les étend à **tout réel** grâce au **cercle trigonométrique** : on enroule la droite des réels autour d'un cercle de rayon 1, et le cosinus et le sinus d'un réel x sont les coordonnées du point ainsi atteint. Cette construction fait naître deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, périodiques, bornées, dérivables, qui modélisent tout ce qui oscille : marées, températures, courant alternatif, vibrations. Le chapitre demande trois habiletés : lire le cercle (mesures en radians, valeurs remarquables, symétries), manipuler les fonctions cosinus et sinus comme les autres fonctions (dérivées, variations), et résoudre des équations en n'oubliant aucune solution.

Prérequis : Trigonométrie du triangle rectangle, Dérivation. **Pour s'entraîner :** Exercices : fonctions trigonométriques.

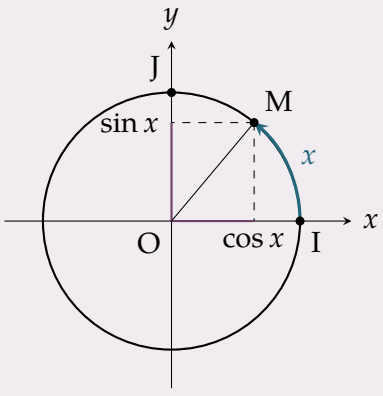
Propriété 1 (Cercle trigonométrique et radian, T^le)

Cercle trigonométrique : cercle de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre), avec le point de départ I(1 ; 0).

Radian : mesure d'un angle qui intercepte, sur ce cercle, un arc de longueur égale au rayon. Un tour complet mesure 2π radians : π rad correspond à 180°, et la conversion est proportionnelle ($x° = \dfrac{\pi x}{180}$ rad).

Enroulement : à tout réel x on associe le point M du cercle obtenu en parcourant la longueur $|x|$ depuis I (sens direct si $x > 0$). On pose alors $\cos x$ = abscisse de M et $\sin x$ = ordonnée de M.

Périodicité : x et $x + 2k\pi$ (k entier) donnent le même point : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Parmi toutes ces valeurs, celle qui appartient à $]-\pi\ ;\ \pi]$ est la **mesure principale**.



Exercice 1 *Radians et mesure principale (T^{le})*

1. Convertir en radians : 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°. Convertir en degrés : $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, 2 rad (arrondir au dixième).
2. Déterminer la mesure principale de $\frac{13\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{4}$, $\frac{17\pi}{3}$ et $\frac{25\pi}{4}$.
3. Dans quel quart du cercle se trouvent les points associés à $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{3\pi}{4}$? Donner dans chaque cas le signe du cosinus et du sinus.

Propriété 2 (Valeurs remarquables et symétries, T^{le})

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Relation fondamentale : pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (théorème de Pythagore dans le cercle de rayon 1), et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
Angles opposés : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ (symétrie par rapport à l'axe des abscisses).
Angles supplémentaires : $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).
Demi-tour : $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$ (symétrie par rapport à O).
Angles complémentaires : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Méthode : calculer le cosinus ou le sinus d'un réel quelconque

1. Ramener le réel dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ en retirant des multiples de 2π.
2. L'écrire sous la forme $\pi - a$, $\pi + a$ ou $-a$ avec a une valeur remarquable du premier quart.
3. Appliquer la symétrie correspondante en surveillant les signes, et vérifier avec le quart du cercle.

Exemple. $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, donc $\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vérification : le point est dans le deuxième quart, cosinus négatif et sinus positif. ✓

Exercice 2 *Valeurs remarquables, étape par étape (T^{le})*

1. Compléter : $\frac{5\pi}{6} = \pi - \ldots$, donc $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\ldots = \ldots$ et $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\ldots = \ldots$
2. Calculer $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\frac{7\pi}{6}$, $\sin\frac{4\pi}{3}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\cos\frac{13\pi}{6}$.
3. On sait que $\cos x = \frac{1}{3}$ et que $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[$. Calculer $\sin x$.
4. On sait que $\sin x = \frac{3}{5}$ et que $x \in \left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$. Calculer $\cos x$.

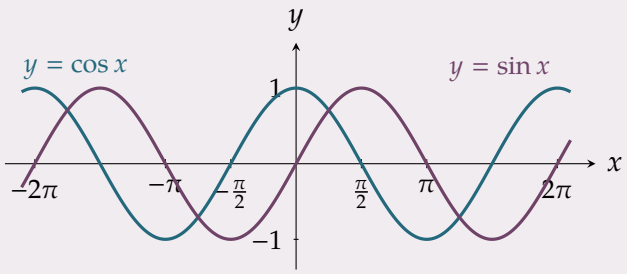
Propriété 3 (Les fonctions cosinus et sinus, T^{le})

Définition : $\cos : x \mapsto \cos x$ et $\sin : x \mapsto \sin x$ sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1\ ;\ 1]$, et **périodiques de période** 2π.

Parité : cos est paire (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées), sin est impaire (courbe symétrique par rapport à l'origine).

Dérivées : $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$. Plus généralement $(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$ et $(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$.

Variations sur $[0\ ;\ \pi]$: cos est décroissante de 1 à -1 ; sin est croissante sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ (de 0 à 1) puis décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ (de 1 à 0).



Méthode : étudier une fonction trigonométrique

1. Repérer la période et la parité pour réduire l'intervalle d'étude (souvent $[0\ ;\ \pi]$).
2. Dériver avec $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$, puis factoriser f' (au besoin, remplacer $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$).
3. Étudier le signe de chaque facteur sur l'intervalle d'étude à l'aide du cercle, dresser le tableau, puis étendre par symétrie et périodicité.

Exercice 3 *Dériver des fonctions trigonométriques (T^{le})*

1. Calculer la dérivée de chaque fonction.

   a) $f(x) = 3\cos x - 2\sin x$ b) $g(x) = \sin(2x)$

   c) $h(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ d) $k(x) = x\sin x$

   e) $m(x) = \cos^2 x$ f) $p(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de sin au point d'abscisse 0, puis celle de la tangente à la courbe de cos au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

Propriété 4 (Équations trigonométriques, T^{le})

Pour tout réel a et tout entier k :

Cosinus : $\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi$ **ou** $x = -a + 2k\pi$.
Sinus : $\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi$ **ou** $x = \pi - a + 2k\pi$.
Lecture : deux points du cercle ont le même cosinus s'ils sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ; le même sinus s'ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Il y a donc en général **deux familles** de solutions.

Méthode : résoudre une équation trigonométrique

1. Isoler $\cos x$ ou $\sin x$ et reconnaître une valeur remarquable : écrire $\cos x = \cos a$ ou $\sin x = \sin a$.
2. Écrire les deux familles de solutions dans $\mathbb{R}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).
3. Si un intervalle est imposé, donner à k les valeurs qui y ramènent, en s'aidant du cercle.

Exemple. $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, donc $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Dans $]-\pi\ ;\ \pi]$: $x = -\frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$. Dans $[0\ ;\ 2\pi[$: $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.

Exercice 4 *Résoudre des équations trigonométriques (T^{le})*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi\ ;\ \pi]$: $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$: $2\cos x + \sqrt{3} = 0$.
3. Résoudre dans $[0\ ;\ \pi]$: $\sin(2x) = \dfrac{1}{2}$.
4. Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'inéquation $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$, à l'aide du cercle.

Exercice 5 *Étude complète d'une fonction trigonométrique (T^{le})* Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$.

1. Montrer que f est impaire et périodique de période 2π. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0\ ;\ \pi]$.
2. Montrer que $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$, puis que $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.
3. Étudier le signe de f' sur $[0\ ;\ \pi]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
4. En déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$ et les réels où il est atteint.

Exercice 6 *Problème en contexte : hauteur d'eau dans un port (T^{le})* Dans un port, la hauteur d'eau (en mètres) t heures après minuit est modélisée sur $[0\ ;\ 24]$ par $h(t) = 4 + 1{,}5\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$.

1. Calculer $h(0)$, $h(3)$ et $h(6)$. Quelle est la période de h ? Interpréter.
2. Déterminer les hauteurs maximale et minimale et les instants où elles sont atteintes sur $[0\ ;\ 24]$.
3. Un bateau ne peut entrer que si la hauteur d'eau est au moins 4,75 m. Résoudre $h(t) \geqslant 4{,}75$ sur $[0\ ;\ 24]$ et donner les créneaux d'entrée.
4. Calculer $h'(t)$ et déterminer à quels instants la hauteur diminue le plus vite. Quelle est alors cette vitesse ?

Exercice 7 *Problème en contexte : température d'une journée (T^{le})* La température extérieure (en degrés Celsius) t heures après minuit est modélisée sur $[0\ ;\ 24]$ par $\mathrm{T}(t) = 15 - 6\cos\left(\dfrac{\pi t}{12}\right)$.

1. À quelle heure la température est-elle minimale ? maximale ? Donner ces températures.
2. Pendant quelle plage horaire la température est-elle supérieure ou égale à 18 °C ?
3. Calculer $\mathrm{T}'(t)$. À quelle heure la température augmente-t-elle le plus vite, et de combien de degrés par heure ?
4. Un capteur relève 12 °C. À quelles heures cela peut-il se produire ? (Valeur exacte, puis arrondie au quart d'heure.)

⚠ Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Oublier la seconde famille de solutions	« $\cos x = \dfrac{1}{2}$ donc $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ »	aussi $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$: deux points du cercle ont le même cosinus
Oublier le $+2k\pi$	« $\sin x = 1$ donc $x = \dfrac{\pi}{2}$ »	$x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, sauf si un intervalle est imposé
Confondre les symétries	« $\sin(\pi - x) = -\sin x$ »	$\sin(\pi - x) = \sin x$ (symétrie d'axe vertical) ; c'est $\sin(\pi + x)$ qui vaut $-\sin x$
Oublier le coefficient en dérivant	« $(\sin(2x))' = \cos(2x)$ »	$(\sin(2x))' = 2\cos(2x)$: dérivée de la fonction intérieure
Calculatrice en degrés	« $\cos 1 \approx 0{,}9998$ »	en radians, $\cos 1 \approx 0{,}54$: vérifier le mode avant tout calcul

Exercice 8 *QCM (T^{le})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. Un angle de 150° mesure, en radians :

   A. $\dfrac{5\pi}{3}$ **B.** $\dfrac{3\pi}{4}$ **C.** $\dfrac{5\pi}{6}$ **D.** $\dfrac{2\pi}{3}$

2. Pour tout réel x, $\cos(\pi - x)$ est égal à :

   A. $-\cos x$ **B.** $\cos x$ **C.** $\sin x$ **D.** $-\sin x$

3. La dérivée de $x \mapsto \sin(3x)$ est :

A. $x \mapsto \cos(3x)$ **B.** $x \mapsto -3\cos(3x)$ **C.** $x \mapsto 3\sin(3x)$ **D.** $x \mapsto 3\cos(3x)$

4. Dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, l'équation $\sin x = \dfrac{1}{2}$ a pour solutions :

A. $\dfrac{\pi}{6}$ seulement **B.** $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$ **C.** $\dfrac{\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$ **D.** $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$

Exercice 9 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

B. La fonction sinus est paire.

C. Pour tout réel x, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

D. L'équation $\cos x = 0$ a pour unique solution $x = \dfrac{\pi}{2}$.

E. La dérivée de la fonction sinus est $-\cos$.

F. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

G. La fonction cosinus est décroissante sur $[0\ ;\ \pi]$.

H. $\sin x = \sin a$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche ***Que faire quand je bloque ?***
Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche ***Mémorisation et sciences cognitives****.*
Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton ***Carnet d'erreurs****.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. $30° = \frac{\pi}{6}$, $45° = \frac{\pi}{4}$, $60° = \frac{\pi}{3}$, $90° = \frac{\pi}{2}$, $120° = \frac{2\pi}{3}$, $135° = \frac{3\pi}{4}$, $150° = \frac{5\pi}{6}$, $180° = \pi$. Réciproquement $\frac{\pi}{12} = 15°$, $\frac{5\pi}{4} = 225°$, $\frac{7\pi}{6} = 210°$, $2 \text{ rad} = \frac{360}{\pi} \approx 114{,}6°$.
2. $\frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{4} + 2\pi = \frac{\pi}{4}$; $\frac{17\pi}{3} - 6\pi = -\frac{\pi}{3}$; $\frac{25\pi}{4} - 6\pi = \frac{\pi}{4}$. Dans chaque cas on retire ou ajoute un multiple de 2π pour tomber dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.
3. $\frac{\pi}{3}$: premier quart (en haut à droite), cosinus et sinus positifs. $-\frac{\pi}{6}$: quatrième quart (en bas à droite), cosinus positif, sinus négatif. $\frac{5\pi}{6}$: deuxième quart (en haut à gauche), cosinus négatif, sinus positif. $-\frac{3\pi}{4}$: troisième quart (en bas à gauche), cosinus et sinus négatifs.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, donc $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
2. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ donc $\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ donc $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$ donc $\cos\frac{13\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, donc $\sin x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Comme $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[$, le sinus est négatif : $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
4. $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, donc $\cos x = \pm\frac{4}{5}$. Dans $\left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$ le cosinus est négatif : $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Corrigé de l'exercice 3.

1.

   a) $f'(x) = -3\sin x - 2\cos x$.

   b) $g'(x) = 2\cos(2x)$.

   c) $h'(x) = -3\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

   d) Produit : $k'(x) = \sin x + x\cos x$.

   e) $m = u^2$ avec $u = \cos$: $m'(x) = 2\cos x \times (-\sin x) = -2\sin x\cos x$.

   f) Quotient : $p'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

2. $\sin 0 = 0$ et $\sin' 0 = \cos 0 = 1$: tangente $y = x$. $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\cos' \dfrac{\pi}{2} = -\sin \dfrac{\pi}{2} = -1$: tangente $y = -\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -x + \dfrac{\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 4.

1. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$, donc $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$. Dans $]-\pi\ ;\ \pi]$: $x = -\dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4} - 2\pi = -\dfrac{3\pi}{4}$. Les deux points sont dans la moitié inférieure du cercle, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. ✓
2. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos \dfrac{5\pi}{6}$, donc $x = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6}$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.
3. $\sin(2x) = \sin \dfrac{\pi}{6}$ donne $2x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, soit $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi$. Dans $[0\ ;\ \pi]$, seul $k = 0$ convient : $x = \dfrac{\pi}{12}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{12}$ (pour $k = 1$, $\dfrac{13\pi}{12} > \pi$).
4. Sur le cercle, les points d'abscisse supérieure ou égale à $\dfrac{1}{2}$ forment l'arc allant de $-\dfrac{\pi}{3}$ à $\dfrac{\pi}{3}$ en passant par I : l'ensemble des solutions est $\left[-\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right]$.

Corrigé de l'exercice 5.

1. $f(-x) = \sin(-x)\,(1 + \cos(-x)) = -\sin x\,(1 + \cos x) = -f(x)$: f est impaire. $f(x + 2\pi) = f(x)$ car cos et sin sont 2π-périodiques. La courbe sur $[-\pi\ ;\ 0]$ se déduit de celle sur $[0\ ;\ \pi]$ par symétrie centrale, puis on translate de 2π : l'étude sur $[0\ ;\ \pi]$ suffit.
2. Produit : $f'(x) = \cos x\,(1 + \cos x) + \sin x\,(-\sin x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$. Avec $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$: $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$. En posant $\mathrm{X} = \cos x$, $2\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 1$ a pour racines $\dfrac{1}{2}$ et -1, donc $2\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 1 = 2\left(\mathrm{X} - \dfrac{1}{2}\right)(\mathrm{X} + 1) = (2\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} + 1)$.
3. Sur $[0\ ;\ \pi]$, $\cos x + 1 \geqslant 0$ (nul seulement en π). Le signe de f' est celui de $2\cos x - 1$: positif si $\cos x > \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right[$, négatif sur $\left]\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$. Valeurs : $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}30$, $f(\pi) = 0$.

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

4. Sur $[0\ ;\ \pi]$ le maximum est $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ en $\dfrac{\pi}{3}$. Sur $[-\pi\ ;\ 0]$, par imparité, $f \leqslant 0$. Par périodicité, le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, atteint en $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Corrigé de l'exercice 6.

1. $h(0) = 4 + 1{,}5 = 5{,}5$; $h(3) = 4 + 1{,}5\cos\dfrac{\pi}{2} = 4$; $h(6) = 4 + 1{,}5\cos\pi = 2{,}5$. La période est T telle que $\dfrac{\pi \mathrm{T}}{6} = 2\pi$, soit T = 12 h : deux marées hautes par jour.
2. Le cosinus est compris entre -1 et 1 : h varie entre 2,5 m et 5,5 m. Maximum 5,5 m quand $\cos\dfrac{\pi t}{6} = 1$, soit $\dfrac{\pi t}{6} = 2k\pi$, $t = 12k$: à 0 h, 12 h et 24 h. Minimum 2,5 m quand $\dfrac{\pi t}{6} = \pi + 2k\pi$, $t = 6 + 12k$: à 6 h et 18 h.
3. $h(t) \geqslant 4{,}75 \iff \cos\dfrac{\pi t}{6} \geqslant \dfrac{1}{2} \iff -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant \dfrac{\pi t}{6} \leqslant \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \iff -2 + 12k \leqslant t \leqslant 2 + 12k$. Sur $[0\ ;\ 24]$: $t \in [0\ ;\ 2] \cup [10\ ;\ 14] \cup [22\ ;\ 24]$. Le bateau peut entrer de minuit à 2 h, de 10 h à 14 h et de 22 h à minuit.
4. $h'(t) = -1{,}5 \times \dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi t}{6} = -\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi t}{6}$. La hauteur diminue le plus vite quand $\sin\dfrac{\pi t}{6} = 1$, soit $\dfrac{\pi t}{6} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $t = 3 + 12k$: à 3 h et 15 h, la vitesse vaut $-\dfrac{\pi}{4} \approx -0{,}79$ m/h, soit une baisse d'environ 79 cm par heure.

Corrigé de l'exercice 7.

1. T est minimale quand $\cos\dfrac{\pi t}{12} = 1$, soit $t = 0$ (et $t = 24$) : T = 9 °C à minuit. Maximale quand $\cos\dfrac{\pi t}{12} = -1$, soit $\dfrac{\pi t}{12} = \pi$, $t = 12$: T = 21 °C à midi.
2. $\mathrm{T}(t) \geqslant 18 \iff -6\cos\dfrac{\pi t}{12} \geqslant 3 \iff \cos\dfrac{\pi t}{12} \leqslant -\dfrac{1}{2} \iff \dfrac{2\pi}{3} \leqslant \dfrac{\pi t}{12} \leqslant \dfrac{4\pi}{3}$ (sur un tour, avec $\dfrac{\pi t}{12} \in [0\ ;\ 2\pi]$), soit $8 \leqslant t \leqslant 16$: de 8 h à 16 h.
3. $\mathrm{T}'(t) = 6 \times \dfrac{\pi}{12}\sin\dfrac{\pi t}{12} = \dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi t}{12}$. Maximum quand $\sin\dfrac{\pi t}{12} = 1$, soit $t = 6$: à 6 h, la température augmente de $\dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ °C par heure.
4. $\mathrm{T}(t) = 12 \iff \cos\dfrac{\pi t}{12} = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{\pi t}{12} = \dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{\pi t}{12} = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$ (dans $[0\ ;\ 2\pi]$), soit $t = 4$ ou $t = 20$: à 4 h et à 20 h exactement.

Corrigé de l'exercice 8.

1. **Réponse C.** $150 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{5\pi}{6}$.

   - A : $\dfrac{5\pi}{3}$ correspond à 300°.

- B : $\dfrac{3\pi}{4}$ correspond à 135°.
- D : $\dfrac{2\pi}{3}$ correspond à 120°.

2. **Réponse A.** Les points associés à x et $\pi - x$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées : même sinus, cosinus opposés.
   - B : c'est $\cos(-x)$ qui vaut $\cos x$.
   - C : c'est $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ qui vaut $\sin x$.
   - D : c'est $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ qui vaut $-\sin x$.
3. **Réponse D.** $(\sin(ax))' = a\cos(ax)$ avec $a = 3$.
   - A : le coefficient 3 de la fonction intérieure a été oublié.
   - B : le signe moins apparaît en dérivant un cosinus, pas un sinus.
   - C : la dérivée de sin est cos, pas sin.
4. **Réponse B.** $\sin x = \sin\dfrac{\pi}{6}$ donne $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$.
   - A : la seconde famille de solutions manque.
   - C : $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$; ce serait la réponse pour une équation en cosinus.
   - D : $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, pas $\dfrac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 9.

A. Vrai. x et $x + 2\pi$ correspondent au même point du cercle : la fonction cosinus est 2π-périodique.

B. Faux. $\sin(-x) = -\sin x$: la fonction sinus est impaire. C'est le cosinus qui est pair.

C. Vrai. Angles complémentaires : le cosinus de l'un est le sinus de l'autre.

D. Faux. $\cos x = 0$ pour $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (par exemple $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$ conviennent).

E. Faux. $\sin' = \cos$; c'est $\cos' = -\sin$ qui comporte un signe moins.

F. Vrai. $\cos x$ est l'abscisse d'un point du cercle de rayon 1.

G. Vrai. Quand x parcourt $[0\ ;\ \pi]$, le point M va de I au point $(-1\ ;\ 0)$ par le haut du cercle et son abscisse décroît de 1 à -1. On peut aussi noter que $\cos' = -\sin \leqslant 0$ sur $[0\ ;\ \pi]$.

H. Faux. Il manque la seconde famille $x = \pi - a + 2k\pi$. Par exemple $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \sin\dfrac{\pi}{6}$ alors que $\dfrac{5\pi}{6} \neq \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$.