Fonctions trigonométriques — Fiche d'exercices

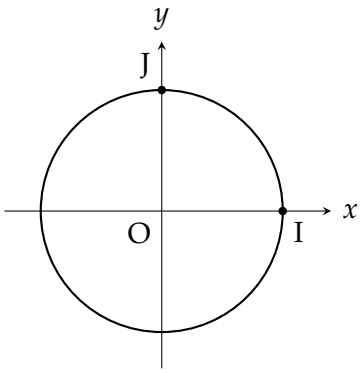
Cette fiche accompagne le mémo sur les fonctions trigonométriques. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver le cercle trigonométrique, le tableau des valeurs remarquables, les formules de symétrie, les dérivées et les deux familles de solutions des équations. Dessine le cercle dès que tu hésites : il répond à presque toutes les questions.

Exercice 1 ***Radians et mesure principale*** **(T^{le}).**

1. Convertir en radians : $30° =$ ..... $45° =$ ..... $60° =$ ..... $90° =$ .....
   $120° =$ ..... $135° =$ ..... $150° =$ ..... $180° =$ .....
   Convertir en degrés : $\dfrac{\pi}{12} =$ ..... $\dfrac{5\pi}{4} =$ ..... $\dfrac{7\pi}{6} =$ ..... $2\text{ rad} \approx$ .....

2. Déterminer la mesure principale de $\dfrac{13\pi}{6}$, $-\dfrac{7\pi}{4}$, $\dfrac{17\pi}{3}$ et $\dfrac{25\pi}{4}$.

3. Placer sur le cercle les points associés à $\dfrac{\pi}{3}$, $-\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ et $-\dfrac{3\pi}{4}$, puis donner dans chaque cas le signe du cosinus et du sinus.



. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Exercice 2 ***Valeurs remarquables, étape par étape*** **(T^{le}).**

1. Compléter : $\dfrac{5\pi}{6} = \pi -$ ..... , donc $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\cos$ ..... $=$ ..... et $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \sin$ ..... $=$ .....

2. Calculer $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\frac{7\pi}{6}$, $\sin\frac{4\pi}{3}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\cos\frac{13\pi}{6}$.

3. On sait que $\cos x = \frac{1}{3}$ et que $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[$. Calculer $\sin x$.

4. On sait que $\sin x = \frac{3}{5}$ et que $x \in \left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$. Calculer $\cos x$.

Exercice 3 ***Dériver des fonctions trigonométriques*** **(T^{le}).**

1. Calculer la dérivée de chaque fonction.

   a) $f(x) = 3\cos x - 2\sin x$

   b) $g(x) = \sin(2x)$

   c) $h(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

   d) $k(x) = x\sin x$

   e) $m(x) = \cos^2 x$

   f) $p(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de sin au point d'abscisse 0, puis celle de la tangente à la courbe de cos au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 *Résoudre des équations trigonométriques* (T^{le}).

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi\ ;\ \pi]$: $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$: $2\cos x + \sqrt{3} = 0$.

3. Résoudre dans $[0\ ;\ \pi]$: $\sin(2x) = \dfrac{1}{2}$.

4. Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'inéquation $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$, à l'aide du cercle.

Exercice 5 ***Étude complète d'une fonction trigonométrique*** **(TIe).** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$.

1. Montrer que f est impaire et périodique de période 2π. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0\ ;\ \pi]$.

2. Montrer que $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$, puis que $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

3. Étudier le signe de f' sur $[0\ ;\ \pi]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

4. En déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$ et les réels où il est atteint.

Exercice 6 ***Problème en contexte : hauteur d'eau dans un port*** **(TIe).** Dans un port, la hauteur d'eau (en mètres) t heures après minuit est modélisée sur $[0\ ;\ 24]$ par $h(t) = 4 + 1{,}5\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$.

1. Calculer $h(0)$, $h(3)$ et $h(6)$. Quelle est la période de h ? Interpréter.

2. Déterminer les hauteurs maximale et minimale et les instants où elles sont atteintes sur $[0\ ;\ 24]$.

3. Un bateau ne peut entrer que si la hauteur d'eau est au moins 4,75 m. Résoudre $h(t) \geqslant 4{,}75$ sur $[0\ ;\ 24]$ et donner les créneaux d'entrée.

4. Calculer $h'(t)$ et déterminer à quels instants la hauteur diminue le plus vite. Quelle est alors cette vitesse ?

Exercice 7 ***Problème en contexte : température d'une journée*** **(T^{le}).** La température extérieure (en degrés Celsius) t heures après minuit est modélisée sur $[0\ ;24]$ par $\mathrm{T}(t) = 15 - 6\cos\left(\dfrac{\pi t}{12}\right)$.

1. À quelle heure la température est-elle minimale ? maximale ? Donner ces températures.

2. Pendant quelle plage horaire la température est-elle supérieure ou égale à 18 °C ?

3. Calculer T′(t). À quelle heure la température augmente-t-elle le plus vite, et de combien de degrés par heure ?

4. Un capteur relève 12 °C. À quelles heures cela peut-il se produire ?

Exercice 8 *QCM* (*T^le^*)**.** Pour chaque question, entourer la seule réponse correcte, puis justifier en une phrase.

1. Un angle de 150° mesure, en radians :

   A. $\frac{5\pi}{3}$ **B.** $\frac{3\pi}{4}$ **C.** $\frac{5\pi}{6}$ **D.** $\frac{2\pi}{3}$

   .....

2. Pour tout réel x, $\cos(\pi - x)$ est égal à :

   A. $-\cos x$ **B.** $\cos x$ **C.** $\sin x$ **D.** $-\sin x$

   .....

3. La dérivée de $x \mapsto \sin(3x)$ est :

   A. $x \mapsto \cos(3x)$ **B.** $x \mapsto -3\cos(3x)$ **C.** $x \mapsto 3\sin(3x)$ **D.** $x \mapsto 3\cos(3x)$

   .....

4. Dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ a pour solutions :

   A. $\frac{\pi}{6}$ seulement **B.** $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$ **C.** $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$ **D.** $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$

   .....

Exercice 9 ***Vrai ou faux ?.*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

B. La fonction sinus est paire.

C. Pour tout réel x, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

D. L'équation $\cos x = 0$ a pour unique solution $x = \frac{\pi}{2}$.

E. La dérivée de la fonction sinus est $-\cos$.

F. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

G. La fonction cosinus est décroissante sur $[0\ ;\ \pi]$.

H. $\sin x = \sin a$ équivaut à $x = a + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.