La fonction exponentielle

La fonction exponentielle est la fonction qui décrit toutes les évolutions à vitesse proportionnelle à la quantité présente : intérêts composés, croissance d'une population, désintégration radioactive. Elle se reconnaît à une propriété unique : elle est égale à sa propre dérivée. On la note e^x, elle est toujours strictement positive et strictement croissante. La difficulté principale est de manipuler ses propriétés algébriques sans les confondre avec celles des puissances usuelles.

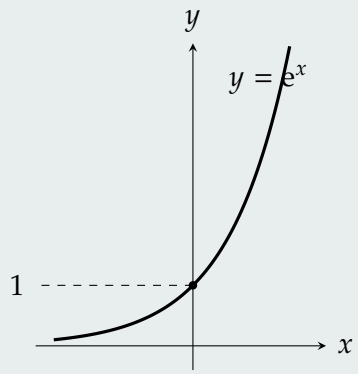
Prérequis : Puissances, Dérivation. **Pour s'entraîner :** Exercices : fonction exponentielle.

Définition 1 (1re)

La **fonction exponentielle**, notée exp, est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\exp' = \exp \qquad \text{et} \qquad \exp(0) = 1.$$

On note $\exp(x) = e^x$, où $e = \exp(1) \approx 2{,}718$. Sa dérivée est elle-même : si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.



Exercice 1 *Comprendre la définition (1re)*

1. Compléter : $\exp(0) = \ldots$; $\exp(1) = e \approx \ldots$; la dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$ est ...
2. Soit $f(x) = e^x$. Donner les valeurs exactes de $f'(0)$ et $f'(1)$, puis déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Montrer que la fonction $g(x) = 2e^x$ vérifie $g' = g$. La fonction $h(x) = e^x + 1$ vérifie-t-elle $h' = h$?

Propriété 1 (Propriétés algébriques, 1re)

Pour tous réels a et b et tout entier n :

Propriété	Formule
Produit	$e^a \times e^b = e^{a+b}$
Inverse	$e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
Quotient	$\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
Puissance	$(e^a)^n = e^{na}$

Exemple. $e^{3x} \times e^{-x} = e^{3x+(-x)} = e^{2x}$. $\dfrac{e^5}{e^2} = e^{5-2} = e^3$. $(e^x)^3 = e^{3x}$.

Exercice 2 *Simplifier, étape par étape (1re)* Compléter chaque étape.

1. $A = \dfrac{e^3 \times e^5}{e^2} = \dfrac{e^{\cdots+\cdots}}{e^2} = \dfrac{e^{\cdots}}{e^2} = e^{\cdots-2} = e^{\cdots}$
2. $B = \left(e^{2x}\right)^2 \times e^{-x} = e^{\cdots} \times e^{-x} = e^{\cdots+(-x)} = e^{\cdots}$

Exercice 3 *Simplifier avec les propriétés (1re)* Écrire chaque expression sous la forme e^k, e^{kx} ou sous la forme la plus simple possible.

a) $A = e^4 \times e^{-1}$

b) $B = \dfrac{e^7}{e^3}$

c) $C = \left(e^{2x}\right)^3$

d) $D = \dfrac{e^{5x} \times e^x}{e^{2x}}$

e) $E = e^x \times e^{-x}$

f) $F = \dfrac{1}{e^{-2x}}$

g) $G = \dfrac{e^{x+1}}{e}$

h) $H = (e^x + 1)(e^x - 1)$

Propriété 2 (Signe et variations, 1re)

Pour tout réel x, $e^x > 0$: la fonction exponentielle est **toujours strictement positive**. Comme sa dérivée e^x est elle aussi strictement positive, la fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. Sa courbe passe par le point $(0\ ;\ 1)$ et reste au-dessus de l'axe des abscisses.

Méthode : équations et inéquations

La fonction exponentielle étant strictement croissante, pour tous réels a et b :

$$\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b.$$

On se ramène donc à une équation (ou une inéquation) du premier degré sur les exposants.

Exemple. Résoudre $\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^5$. Puisque l'exponentielle est strictement croissante : $\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^5 \iff 2x - 1 = 5 \iff x = 3$.
Résoudre $\mathrm{e}^x > 1$. Comme $1 = \mathrm{e}^0$, on a $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 \iff x > 0$. L'ensemble des solutions est $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 4 *Résoudre des équations et des inéquations (1re)* Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $\mathrm{e}^{3x-2} = \mathrm{e}^{x+4}$

b) $\mathrm{e}^x = 1$

c) $\mathrm{e}^{2x} \leqslant \mathrm{e}^6$

d) $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^4$

e) $\mathrm{e}^{2x+1} > 1$

f) $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^3 = \mathrm{e}^7$

g) $\mathrm{e}^{-x} \geqslant \mathrm{e}^2$

Exercice 5 *Signe et dérivée avec l'exponentielle (1re)*

1. Étudier le signe de $g(x) = (x - 2)\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.
2. On considère $h(x) = x\,\mathrm{e}^x$, définie sur $\mathbb{R}$.
   a) Calculer $h'(x)$ et montrer que $h'(x) = (x + 1)\,\mathrm{e}^x$.
   b) Étudier le signe de $h'(x)$.
   c) Dresser le tableau de variations de h et préciser la valeur exacte de son minimum, puis une valeur approchée au centième.

Exercice 6 *Problème en contexte (1re)* Une population de bactéries, en milliers d'individus, est modélisée par $\mathrm{P}(t) = 1000\,\mathrm{e}^{0,1t}$, où t est le temps en heures.

1. Calculer la population initiale $\mathrm{P}(0)$.
2. Calculer $\mathrm{P}(10)$ (arrondir à l'unité).
3. Expliquer, sans dérivée, pourquoi la population est strictement croissante.
4. Calculer le quotient $\dfrac{\mathrm{P}(20)}{\mathrm{P}(10)}$ et interpréter le résultat.
5. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{P}(t + 10) = \mathrm{e} \times \mathrm{P}(t)$. Que signifie cette égalité ?

⚠ Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Multiplier les exposants au lieu de les additionner	$e^a \times e^b = e^{ab}$	$e^a \times e^b = e^{a+b}$
Croire que e^x peut être nul ou négatif	$e^x = 0$ a une solution	$e^x > 0$ toujours, jamais nul
Confondre e^{a-b} et $e^a - e^b$	$\dfrac{e^a}{e^b} = e^a - e^b$	$\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
Oublier que $1 = e^0$	« $e^x = 1$ impossible »	$e^x = e^0 \iff x = 0$

Exercice 7 *QCM (1^{re})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. $e^3 \times e^4$ est égal à :

   A. e^{12} **B.** e^7 **C.** $2e^7$ **D.** e^{34}

2. L'équation $e^x = 0$:

   A. a pour solution $x = 0$ **B.** a pour solution $x = 1$
   C. a une infinité de solutions **D.** n'a aucune solution

3. $(e^x)^2$ est égal à :

   A. e^{2x} **B.** e^{x^2} **C.** $2e^x$ **D.** e^{x+2}

4. L'inéquation $e^{2x-1} < e^3$ équivaut à :

   A. $2x - 1 > 3$ **B.** $x < 3$ **C.** $x < 2$ **D.** $x < 1$

Exercice 8 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. e^{-x} est négatif pour tout réel x.

B. Pour tous réels a et b, $e^{a+b} = e^a + e^b$.

C. La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

D. $e^{2x} = (e^x)^2$.

E. La courbe de la fonction exponentielle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 0.

F. Si $e^a = e^b$, alors $a = b$.

G. $e^x \times e^{-x} = 0$.

H. La dérivée de la fonction $x \mapsto 5e^x$ est $x \mapsto 5e^x$.

*Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche **Que faire quand je bloque ?***
*Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche **Mémorisation et sciences cognitives**.*
*Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton **Carnet d'erreurs**.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. $\exp(0) = 1$; $\exp(1) = \mathrm{e} \approx 2{,}718$; la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est la fonction elle-même, $x \mapsto \mathrm{e}^x$.
2. Comme $f' = f$, $f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ et $f'(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1 \times x + 1 = x + 1$.
3. D'après la formule $(k\,u)' = k\,u'$, $g'(x) = 2\,\mathrm{e}^x = g(x)$: la fonction g vérifie bien $g' = g$. En revanche, $h'(x) = \mathrm{e}^x + 0 = \mathrm{e}^x$, alors que $h(x) = \mathrm{e}^x + 1$: on a $h' \neq h$, la constante ajoutée disparaît en dérivant.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $\mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{3+5}}{\mathrm{e}^2} = \dfrac{\mathrm{e}^8}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{8-2} = \mathrm{e}^6$. On a utilisé la règle du produit (on additionne les exposants), puis celle du quotient (on les soustrait).
2. $\mathrm{B} = \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^2 \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{4x} \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{4x+(-x)} = \mathrm{e}^{3x}$. On a utilisé la règle de la puissance (on multiplie l'exposant par 2), puis celle du produit.

Corrigé de l'exercice 3.

1. $\mathrm{A} = \mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{4+(-1)} = \mathrm{e}^3$.
2. $\mathrm{B} = \dfrac{\mathrm{e}^7}{\mathrm{e}^3} = \mathrm{e}^{7-3} = \mathrm{e}^4$.
3. $\mathrm{C} = \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^3 = \mathrm{e}^{2x\times 3} = \mathrm{e}^{6x}$.
4. $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{e}^{5x} \times \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{6x}}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{6x-2x} = \mathrm{e}^{4x}$.
5. $\mathrm{E} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x+(-x)} = \mathrm{e}^0 = 1$.
6. $\mathrm{F} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-2x}} = \mathrm{e}^{2x}$, car l'inverse de e^{-2x} est e^{2x} (règle de l'inverse : $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$).
7. $\mathrm{G} = \dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^1} = \mathrm{e}^x$. On peut aussi écrire $\mathrm{e}^{(x+1)-1} = \mathrm{e}^x$.
8. H est une identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a = \mathrm{e}^x$ et $b = 1$: $\mathrm{H} = (\mathrm{e}^x)^2 - 1 = \mathrm{e}^{2x} - 1$.

Corrigé de l'exercice 4. Dans chaque cas, on utilise la stricte croissance de la fonction exponentielle : $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$ et $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b$.

1. $\mathrm{e}^{3x-2} = \mathrm{e}^{x+4} \iff 3x - 2 = x + 4 \iff 2x = 6 \iff x = 3$. $\mathrm{S} = \{3\}$.
2. Comme $1 = \mathrm{e}^0$: $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 \iff x = 0$. $\mathrm{S} = \{0\}$.
3. $\mathrm{e}^{2x} \leqslant \mathrm{e}^6 \iff 2x \leqslant 6 \iff x \leqslant 3$. $\mathrm{S} =]-\infty\ ;\ 3]$.
4. $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^4 \iff x^2 = 4 \iff x = -2$ ou $x = 2$. $\mathrm{S} = \{-2\ ;\ 2\}$. Attention à ne pas oublier la solution négative.

5. Comme $1 = e^0$: $e^{2x+1} > e^0 \iff 2x+1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$. $S = \left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
6. $e^x \times e^3 = e^{x+3}$, donc $e^{x+3} = e^7 \iff x+3 = 7 \iff x = 4$. $S = \{4\}$.
7. $e^{-x} \geqslant e^2 \iff -x \geqslant 2 \iff x \leqslant -2$. On a changé le sens de l'inégalité en multipliant par -1. $S =]-\infty\ ;\ -2]$.

Corrigé de l'exercice 5.

1. Pour tout réel x, $e^x > 0$. Le signe de $g(x)$ est donc celui du facteur $x-2$, qui s'annule en 2 :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	

$g(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 2[$, $g(2) = 0$ et $g(x) > 0$ sur $]2\ ;\ +\infty[$.

2.

a) h est un produit avec $u = x$ et $v = e^x$, donc $u' = 1$ et $v' = e^x$:

$$h'(x) = u'v + uv' = 1 \times e^x + x \times e^x$$
$$h'(x) = (1+x)\,e^x = (x+1)\,e^x.$$

b) Comme $e^x > 0$, le signe de $h'(x)$ est celui de $x+1$: $h'(x) < 0$ pour $x < -1$, $h'(-1) = 0$ et $h'(x) > 0$ pour $x > -1$.

c) La fonction h est décroissante sur $]-\infty\ ;\ -1]$ et croissante sur $[-1\ ;\ +\infty[$. Son minimum vaut $h(-1) = -1 \times e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0{,}37$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗	

Corrigé de l'exercice 6.

1. $P(0) = 1000\,e^0 = 1000 \times 1 = 1000$, soit un million de bactéries (la population est en milliers).
2. $P(10) = 1000\,e^{0{,}1\times 10} = 1000\,e^1 \approx 1000 \times 2{,}718 \approx 2718$.

3. Lorsque t augmente, l'exposant $0{,}1\,t$ augmente aussi ; or la fonction exponentielle est strictement croissante, donc $\mathrm{e}^{0{,}1t}$ augmente, et $\mathrm{P}(t)$ également. La population est donc strictement croissante.
4. $\dfrac{\mathrm{P}(20)}{\mathrm{P}(10)} = \dfrac{1000\,\mathrm{e}^2}{1000\,\mathrm{e}^1} = \mathrm{e}^{2-1} = \mathrm{e} \approx 2{,}718$. Entre la dixième et la vingtième heure, la population est multipliée par e, soit environ par 2,7.
5. $\mathrm{P}(t+10) = 1000\,\mathrm{e}^{0{,}1(t+10)} = 1000\,\mathrm{e}^{0{,}1t+1} = 1000\,\mathrm{e}^{0{,}1t} \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \times \mathrm{P}(t)$. Toutes les dix heures, quelle que soit l'heure de départ, la population est multipliée par le même facteur e : c'est la marque d'une croissance exponentielle.

Corrigé de l'exercice 7.

1. **Réponse B.** $\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^4 = \mathrm{e}^{3+4} = \mathrm{e}^7$: on additionne les exposants.
   - A (e^{12}) : les exposants ont été multipliés.
   - C $(2\,\mathrm{e}^7)$: un coefficient 2 est apparu sans raison (confusion avec une somme $\mathrm{e}^7 + \mathrm{e}^7 = 2\,\mathrm{e}^7$).
   - D (e^{34}) : les exposants ont été « accolés ».
2. **Réponse D.** Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$: l'exponentielle ne s'annule jamais.
   - A : confusion avec $\mathrm{e}^0 = 1$ (et non 0).
   - B : confusion avec $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
   - C : la courbe ne touche jamais l'axe des abscisses, il n'y a aucune solution.
3. **Réponse A.** $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$, donc $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x}$.
   - B (e^{x^2}) : la puissance a été appliquée à l'exposant. Pour $x = 3$, $\left(\mathrm{e}^3\right)^2 = \mathrm{e}^6$ alors que $\mathrm{e}^{3^2} = \mathrm{e}^9$.
   - C $(2\,\mathrm{e}^x)$: le carré a été confondu avec le double.
   - D (e^{x+2}) : on a ajouté 2 à l'exposant au lieu de le multiplier par 2.
4. **Réponse C.** Par stricte croissance, $\mathrm{e}^{2x-1} < \mathrm{e}^3 \iff 2x - 1 < 3 \iff 2x < 4 \iff x < 2$.
   - A : le sens de l'inégalité a été inversé ; l'exponentielle est croissante, elle conserve l'ordre.
   - B : on a comparé x à 3 sans tenir compte de l'exposant $2x - 1$.
   - D : erreur de calcul, $2x - 1 < 3$ donne $2x < 4$ et non $2x < 2$.

Corrigé de l'exercice 8.

A. Faux. $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ est l'inverse d'un nombre strictement positif : il est strictement positif. Le signe moins dans l'exposant ne rend pas le résultat négatif.

B. Faux. La règle est $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$. Contre-exemple avec $a = b = 0$: $\mathrm{e}^0 = 1$, alors que $\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0 = 2$.

C. Vrai. Sa dérivée est $e^x > 0$ pour tout x, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D. Vrai. $(e^x)^2 = e^{2x}$ d'après la règle $(e^a)^n = e^{na}$.

E. Faux. La courbe ne coupe jamais l'axe des abscisses, car $e^x > 0$ pour tout x. Au point d'abscisse 0, elle coupe l'axe des *ordonnées*, au point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.

F. Vrai. La fonction exponentielle est strictement croissante, donc deux réels différents ont des images différentes : $e^a = e^b$ impose $a = b$.

G. Faux. $e^x \times e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0 = 1$. Un produit de deux nombres strictement positifs ne peut pas être nul.

H. Vrai. D'après la formule $(k\,u)' = k\,u'$ et $(e^x)' = e^x$, la dérivée de $5\,e^x$ est $5\,e^x$.