La fonction exponentielle — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur la fonction exponentielle. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver la définition, les propriétés algébriques et la méthode de résolution des équations et inéquations. Écris toujours la propriété utilisée avant de calculer.

Exercice 1 ***Comprendre la définition*** **(*1re*).**

1. Compléter : $\exp(0) =$ ..... $\exp(1) = \mathrm{e} \approx$ .....
   La dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est .....
2. Soit $f(x) = \mathrm{e}^x$. Donner les valeurs exactes de $f'(0)$ et $f'(1)$, puis déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
   $f'(0) =$ ..... $f'(1) =$ .....
   Tangente : $y =$ .....
3. Montrer que la fonction $g(x) = 2\,\mathrm{e}^x$ vérifie $g' = g$. La fonction $h(x) = \mathrm{e}^x + 1$ vérifie-t-elle $h' = h$?

Exercice 2 ***Simplifier, étape par étape*** **(*1re*).** Compléter chaque étape.

1. $\mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{\cdots\cdots+\cdots\cdots}}{\mathrm{e}^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{\cdots\cdots}}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{\cdots\cdots-2} = \mathrm{e}^{\cdots\cdots}$
2. $\mathrm{B} = \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^2 \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{\cdots\cdots} \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{\cdots\cdots+(-x)} = \mathrm{e}^{\cdots\cdots}$

Exercice 3 ***Simplifier avec les propriétés*** **(*1re*).** Écrire chaque expression sous la forme e^k, e^{kx} ou sous la forme la plus simple possible.

a) $\mathrm{A} = \mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^{-1} =$ .....

b) $\mathrm{B} = \dfrac{\mathrm{e}^7}{\mathrm{e}^3} =$ .....

c) $\mathrm{C} = \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^3 =$ .....

d) $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{e}^{5x} \times \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} =$ .....

e) $\mathrm{E} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} =$ .....

f) $\mathrm{F} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-2x}} =$ .....

g) $\mathrm{G} = \dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}} =$ .....

h) $\mathrm{H} = (\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 1) =$ .....

Exercice 4 ***Résoudre des équations et des inéquations*** **(*1re*).** Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $\mathrm{e}^{3x-2} = \mathrm{e}^{x+4}$

. . . . . .

. . . . . .

2. $e^x = 1$

. . . . . .

3. $e^{2x} \leqslant e^6$

. . . . . .

4. $e^{x^2} = e^4$

. . . . . .

. . . . . .

5. $e^{2x+1} > 1$

. . . . . .

. . . . . .

6. $e^x \times e^3 = e^7$

. . . . . .

. . . . . .

7. $e^{-x} \geqslant e^2$

. . . . . .

. . . . . .

Exercice 5 *Signe et dérivée avec l'exponentielle* (1^{re}).

1. Étudier le signe de $g(x) = (x - 2)\,e^x$ sur $\mathbb{R}$.

2. On considère $h(x) = x\,e^x$, définie sur $\mathbb{R}$.
   a) Calculer $h'(x)$ et montrer que $h'(x) = (x + 1)\,e^x$.

b) Étudier le signe de $h'(x)$.

.....

.....

c) Dresser le tableau de variations de h et préciser la valeur exacte de son minimum, puis une valeur approchée au centième.

Exercice 6 ***Problème en contexte*** **(*1re*).** Une population de bactéries, en milliers d'individus, est modélisée par $\mathrm{P}(t) = 1000\,\mathrm{e}^{0,1t}$, où t est le temps en heures.

1. Calculer la population initiale P(0).

   .....

2. Calculer P(10) (arrondir à l'unité).

   .....

3. Expliquer, sans dérivée, pourquoi la population est strictement croissante.

   .....

   .....

   .....

4. Calculer le quotient $\dfrac{\mathrm{P}(20)}{\mathrm{P}(10)}$ et interpréter le résultat.

5. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{P}(t+10) = \mathrm{e} \times \mathrm{P}(t)$. Que signifie cette égalité ?

Exercice 7 *QCM (1re).* Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. $\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^4$ est égal à :

   A. e^{12} **B.** e^7 **C.** $2\,\mathrm{e}^7$ **D.** e^{34}

2. L'équation $\mathrm{e}^x = 0$:

   A. a pour solution $x = 0$ **B.** a pour solution $x = 1$
   C. a une infinité de solutions **D.** n'a aucune solution

3. $(\mathrm{e}^x)^2$ est égal à :

   A. e^{2x} **B.** e^{x^2} **C.** $2\,\mathrm{e}^x$ **D.** e^{x+2}

4. L'inéquation $\mathrm{e}^{2x-1} < \mathrm{e}^3$ équivaut à :

   A. $2x - 1 > 3$ **B.** $x < 3$ **C.** $x < 2$ **D.** $x < 1$

Exercice 8 *Vrai ou faux ?.* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. e^{-x} est négatif pour tout réel x.

B. Pour tous réels a et b, $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b$.

C. La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

D. $e^{2x} = (e^x)^2$.

E. La courbe de la fonction exponentielle coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 0.

F. Si $e^a = e^b$, alors $a = b$.

G. $e^x \times e^{-x} = 0$.

H. La dérivée de la fonction $x \mapsto 5e^x$ est $x \mapsto 5e^x$.