MATHÉMATIQUES

Maîtriser les variables aléatoires

Une fiche d'exercices pour établir une loi de probabilité, calculer une espérance, une variance et un écart-type

Fiche de cours : Variables aléatoires.

① Pourquoi cette fiche ?

Une variable aléatoire associe un nombre au résultat d'une expérience du hasard. On résume son comportement par l'espérance (la valeur moyenne attendue sur un grand nombre de répétitions) et par la variance et l'écart-type (la dispersion autour de cette moyenne). L'espérance est l'outil de décision : un jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est nulle.

Cette fiche reprend chaque savoir-faire : établir et vérifier une loi de probabilité, calculer l'espérance, la variance et l'écart-type, utiliser une transformation affine, et trancher si un jeu est favorable.

② Établir et vérifier une loi de probabilité

Rappel : la somme des probabilités vaut 1

Une loi de probabilité donne, pour chaque valeur x_i prise par X, la probabilité $P(X = x_i)$. La somme de toutes ces probabilités doit valoir 1 : c'est ce qui permet de vérifier une loi ou de trouver une probabilité manquante.

Exercice 1 *Compléter et vérifier*

a) La variable X suit la loi $P(X = 0) = 0{,}3$, $P(X = 1) = 0{,}5$, $P(X = 2) = p$. Déterminer p.

b) La loi proposée pour Y est $P(Y = 1) = 0{,}2$, $P(Y = 3) = 0{,}4$, $P(Y = 5) = 0{,}5$. Cette loi est-elle correcte ?

③ Calculer une espérance

Rappel : la moyenne pondérée

L'espérance est $\mathrm{E}(X) = \sum x_i \, \mathrm{P}(X = x_i)$: on multiplie chaque valeur par sa probabilité, puis on additionne. Il faut bien pondérer par les probabilités, et non faire une moyenne ordinaire.

Exercice 2 *Calculer* $\mathrm{E}(X)$ La variable X a la loi suivante.

x_i	-1	0	2	5
$\mathrm{P}(X = x_i)$	0,2	0,3	0,4	0,1

a) Vérifier que la loi est bien définie.

b) Calculer $\mathrm{E}(X)$.

④ Calculer une variance et un écart-type

Rappel : la formule de la variance

On calcule $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2$, où $\mathrm{E}(X^2) = \sum x_i^2 \, \mathrm{P}(X = x_i)$. L'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$. Attention : c'est $\mathrm{E}(X^2)$ (la moyenne des carrés) moins $\big(\mathrm{E}(X)\big)^2$ (le carré de la moyenne), pas l'inverse.

Exercice 3 *Calculer* $\mathrm{V}(X)$ *et* $\sigma(X)$ On reprend la variable X de l'exercice précédent ($\mathrm{E}(X) = 1{,}1$).

a) Calculer $\mathrm{E}(X^2)$.

b) En déduire $\mathrm{V}(X)$, puis $\sigma(X)$ (arrondir au centième).

⑤ Transformation affine

Rappel : les formules à connaître

Pour tous réels a et b : $\mathrm{E}(aX+b) = a\,\mathrm{E}(X)+b$ et $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$. Ajouter une constante décale l'espérance sans changer la dispersion ; multiplier par a multiplie la variance par a^2 (et non par a).

Exercice 4 *Appliquer les formules* On sait que $E(X) = 1{,}1$ et $V(X) = 3{,}09$.

a) Calculer $E(2X + 3)$ et $V(2X + 3)$.

b) Calculer $E(3X - 1)$ et $V(3X - 1)$.

⑥ Un jeu est-il favorable ?

Rappel : décider grâce à l'espérance

L'espérance de gain donne le gain moyen par partie sur un grand nombre de parties. Le jeu est **favorable** au joueur si elle est positive, **défavorable** si elle est négative, **équitable** si elle est nulle. Ne pas oublier de retrancher la mise.

Exercice 5 *La roue de la fortune* Une partie coûte 3 €. On fait tourner une roue : on gagne 10 € avec une probabilité de 0,1, 4 € avec une probabilité de 0,3, et rien avec une probabilité de 0,6. On note G le gain net (gain obtenu moins la mise).

a) Donner la loi de probabilité de G.

b) Calculer E(G).

c) Le jeu est-il favorable au joueur ? Justifier.

⑦ Pour s'auto-évaluer

Rappel : cinq questions à se poser

Avant et pendant un exercice sur les variables aléatoires, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Ai-je vérifié que la somme des probabilités de la loi vaut bien 1 ?
- Pour l'espérance, ai-je **pondéré** chaque valeur par sa probabilité (et non fait une moyenne ordinaire) ?
- Pour la variance, ai-je bien calculé $E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$, et non l'inverse ?
- L'écart-type est-il la **racine carrée** de la variance, et non la variance elle-même ?
- Pour une transformation affine, ai-je multiplié la variance par a^2 (et non par a) ?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

a) La somme vaut 1 : $0{,}3 + 0{,}5 + p = 1$, donc $p = 0{,}2$.

b) La somme des probabilités est $0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}5 = 1{,}1 \neq 1$: la loi n'est pas correcte (la somme dépasse 1).

Corrigé de l'exercice 2.

a) $0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1$: la loi est bien définie.

b) $\mathrm{E}(X) = (-1) \times 0{,}2 + 0 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}4 + 5 \times 0{,}1 = -0{,}2 + 0{,}8 + 0{,}5 = 1{,}1$.

Corrigé de l'exercice 3.

a) $\mathrm{E}(X^2) = (-1)^2 \times 0{,}2 + 0^2 \times 0{,}3 + 2^2 \times 0{,}4 + 5^2 \times 0{,}1 = 0{,}2 + 1{,}6 + 2{,}5 = 4{,}3$.

b) $\mathrm{V}(X) = 4{,}3 - 1{,}1^2 = 4{,}3 - 1{,}21 = 3{,}09$, donc $\sigma(X) = \sqrt{3{,}09} \approx 1{,}76$.

Corrigé de l'exercice 4.

a) $\mathrm{E}(2X + 3) = 2 \times 1{,}1 + 3 = 5{,}2$; $\mathrm{V}(2X + 3) = 2^2 \times 3{,}09 = 4 \times 3{,}09 = 12{,}36$.

b) $\mathrm{E}(3X - 1) = 3 \times 1{,}1 - 1 = 2{,}3$; $\mathrm{V}(3X - 1) = 3^2 \times 3{,}09 = 9 \times 3{,}09 = 27{,}81$.

Corrigé de l'exercice 5.

a) Le gain net vaut $10 - 3 = 7$ (probabilité 0,1), $4 - 3 = 1$ (probabilité 0,3) ou $0 - 3 = -3$ (probabilité 0,6).

g_i	7	1	−3
$\mathrm{P}(G = g_i)$	0,1	0,3	0,6

b) $\mathrm{E}(G) = 7 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}3 + (-3) \times 0{,}6 = 0{,}7 + 0{,}3 - 1{,}8 = -0{,}8$.

c) L'espérance de gain est −0,8 € : en moyenne, le joueur perd 0,80 € par partie. Le jeu n'est **pas** favorable au joueur (il serait équitable si l'espérance était nulle).