MATHÉMATIQUES

Maîtriser la trigonométrie dans le triangle rectangle

Une fiche d'exercices pour comprendre l'invariance par similitude, choisir le bon rapport et contrôler les résultats

Fiche de cours : Trigonométrie.

① Pourquoi cette fiche ?

La trigonométrie dans le triangle rectangle est souvent abordée comme une affaire de formules à apprendre par c(oe)ur (SOH-CAH-TOA) sans que le sens conceptuel des trois rapports soit construit. Or, ce sens repose sur une idée géométrique précise : dans tous les triangles rectangles ayant un même angle aigu, les rapports entre les côtés sont les mêmes, indépendamment de la taille du triangle. Cette **invariance par similitude** est le c(oe)ur de la trigonométrie. Une fois acquise, elle rend les formules naturelles plutôt qu'arbitraires.

Cette fiche aborde la trigonométrie en partant de cette invariance. Elle progresse ensuite vers le choix raisonné du rapport (selon les données et l'inconnue), le calcul d'une longueur ou d'un angle, et l'usage de la relation fondamentale $\sin^2 + \cos^2 = 1$ comme outil de vérification. Une attention particulière est portée au **contrôle de vraisemblance** : $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ d'un angle aigu sont toujours dans $[0\ ;\ 1]$.

② L'invariance par similitude

Rappel : pourquoi les rapports sont indépendants de la taille

Considérons deux triangles rectangles ayant un même angle aigu α. Ils sont nécessairement **semblables** : l'un est l'agrandissement (ou la réduction) de l'autre. Si l'on multiplie toutes les longueurs par un même coefficient k, alors le rapport de deux longueurs reste inchangé :

$$\frac{k \times \text{opposé}}{k \times \text{hypoténuse}} = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}.$$

Autrement dit, le rapport **ne dépend que de l'angle**, pas de la taille du triangle. C'est précisément ce qu'expriment les notations $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$: ce sont des nombres qui ne dépendent que de l'angle aigu α.
C'est la grande puissance de la trigonométrie : trois nombres associés à un angle suffisent à décrire toutes les proportions des triangles rectangles ayant cet angle.

Exercice 1 *Vérifier l'invariance* On considère trois triangles rectangles, chacun ayant un angle aigu de 30°. Leurs dimensions sont les suivantes.

- Triangle 1 : hypoténuse 4 cm, côté opposé 2 cm.
- Triangle 2 : hypoténuse 10 cm, côté opposé 5 cm.
- Triangle 3 : hypoténuse 7 cm, côté opposé 3,5 cm.

a) Calculer le rapport $\dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$ pour chaque triangle.

b) Que constate-t-on ?

c) Comment se nomme ce rapport, en lien avec l'angle de 30° ?

③ Définir sinus, cosinus, tangente

Rappel : trois rapports, un schéma

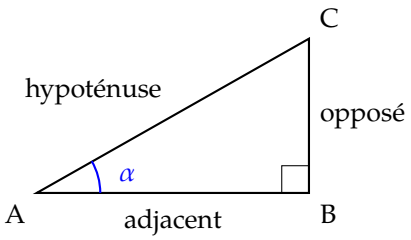
Soit un triangle rectangle, et α l'un de ses angles aigus. Par rapport à α, on distingue trois côtés.

- L'**hypoténuse**, opposée à l'angle droit (toujours le plus long).
- Le côté **opposé** à α (celui qui ne touche pas α).
- Le côté **adjacent** à α (celui qui forme l'angle droit avec l'opposé, et qui touche α).

On définit alors trois rapports.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} \quad ; \quad \cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad ; \quad \tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}.$$

Moyen mnémotechnique : SOH-CAH-TOA. SOH pour sin = Opposé sur Hypoténuse, CAH pour cos = Adjacent sur Hypoténuse, TOA pour tan = Opposé sur Adjacent. Ce moyen mnémotechnique ne suffit pas : il doit toujours s'accompagner d'un schéma où l'angle de référence est clairement repéré.



Exercice 2 *Identifier opposé et adjacent* Dans un triangle ABC rectangle en B, on étudie l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ (que l'on notera α).

a) Quel côté est l'hypoténuse ?

b) Quel côté est opposé à α ?

c) Quel côté est adjacent à α ?

d) Et si l'on étudiait à présent l'angle $\widehat{\text{BCA}}$, comment changeraient les réponses ?

④ Choisir le bon rapport

Rappel : le rapport dépend des données et de l'inconnue

Pour choisir entre sin, cos et tan, on procède en deux temps.

1. On identifie les trois côtés par rapport à l'angle de référence (hypoténuse, opposé, adjacent).
2. On regarde quel côté est connu et quel côté est cherché. Le rapport à utiliser est celui qui fait intervenir uniquement ces deux côtés (et pas le troisième).

Exemples.

- Si l'on connaît l'hypoténuse et l'opposé (ou l'inverse), on utilise sin.
- Si l'on connaît l'hypoténuse et l'adjacent (ou l'inverse), on utilise cos.
- Si l'on connaît l'opposé et l'adjacent (sans l'hypoténuse), on utilise tan.

Exercice 3 *Sans calculer, choisir le rapport* Pour chaque situation, indiquer si l'on doit utiliser sin, cos ou tan. On ne demande pas le calcul, seulement le choix.

a) Triangle rectangle d'angle aigu α : on connaît l'hypoténuse et le côté opposé à α, on cherche α.

b) Triangle rectangle d'angle aigu α : on connaît l'angle α et l'hypoténuse, on cherche le côté adjacent à α.

c) Triangle rectangle d'angle aigu α : on connaît l'opposé et l'adjacent, on cherche α.

d) Triangle rectangle d'angle aigu α : on connaît l'angle α et le côté adjacent, on cherche le côté opposé.

⑤ Calculer une longueur ou un angle

Rappel : deux types de calculs, deux usages de la calculatrice

Calculer une longueur connaissant l'angle. On écrit l'égalité du rapport, on substitue les valeurs connues, on isole l'inconnue, on calcule à la calculatrice (mode **degrés** obligatoire).
Calculer un angle connaissant deux longueurs. On utilise les fonctions inverses $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ (touches arcsin, arccos, arctan sur la calculatrice). À partir du rapport calculé, ces fonctions donnent l'angle.
Erreur fréquente : le mode degrés/radians. Si la calculatrice est en mode radians, les résultats sont aberrants. Réflexe : vérifier que $\sin(30°) = 0{,}5$ avant tout calcul. Si l'on obtient une autre valeur, le mode est mauvais.

Exercice 4 *Calculer une longueur* Dans un triangle ABC rectangle en B, on a $\widehat{\text{BAC}} = 35°$ et AC = 10 cm.

a) Calculer AB (côté adjacent à $\widehat{\text{BAC}}$), à 0,1 cm près.

b) Calculer BC (côté opposé à $\widehat{\text{BAC}}$), à 0,1 cm près.

c) Vérifier la cohérence par le théorème de Pythagore.

Exercice 5 *Calculer un angle* Dans un triangle RST rectangle en S, on a RS = 4 cm et ST = 7 cm.

a) Calculer la longueur de l'hypoténuse RT.

b) Calculer l'angle $\widehat{\text{SRT}}$ à 1° près. Préciser le rapport utilisé.

c) En déduire l'angle $\widehat{\text{STR}}$, sans nouveau calcul trigonométrique.

⑥ Contrôler la vraisemblance

Rappel : sin et cos entre 0 et 1

Pour un angle aigu, le sinus et le cosinus sont toujours strictement compris entre 0 et 1 : c'est l'opposé ou l'adjacent divisé par l'hypoténuse, qui est nécessairement plus longue que les autres côtés.
Si l'on obtient $\sin(\alpha) = 1{,}3$ ou $\cos(\alpha) = 2$, c'est que le calcul est faux : on a confondu un rapport avec son inverse, ou on s'est trompé d'angle de référence.
Repères à retenir.

$$\sin(30°) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \cos(60°) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \sin(45°) = \cos(45°) \quad ; \quad \tan(45°) = 1.$$

Relation fondamentale. Pour tout angle α, on a $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$. C'est une conséquence directe du théorème de Pythagore appliqué à un triangle rectangle d'hypoténuse 1. Cette relation est un excellent outil de contrôle.

Exercice 6 *Détecter les valeurs aberrantes* Pour chaque résultat, dire s'il est vraisemblable pour un angle aigu. Sinon, indiquer ce qui est manifestement faux.

a) $\sin(\alpha) = 0{,}8$
b) $\cos(\alpha) = 1{,}2$
c) $\tan(\alpha) = 0{,}5$
d) $\cos(\alpha) = -0{,}3$
e) $\sin(\alpha) = \dfrac{3}{4}$
f) $\sin(\alpha) = 1{,}5$

Exercice 7 *Utiliser la relation fondamentale*

a) On sait que $\sin(\alpha) = 0{,}6$ pour un angle aigu α. Sans calculatrice, calculer $\cos(\alpha)$.

b) Vérifier ce résultat à la calculatrice en calculant α puis $\cos(\alpha)$.

c) On sait que $\cos(\beta) = \dfrac{12}{13}$ pour un angle aigu β. Calculer $\sin(\beta)$ et $\tan(\beta)$ en valeurs exactes.

7 Pour s'auto-évaluer

Rappel : cinq questions à se poser

Avant et pendant un calcul trigonométrique, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Mon triangle est-il bien rectangle, et ai-je correctement repéré l'angle droit ?
- Par rapport à l'angle de référence, ai-je bien identifié hypoténuse, opposé et adjacent ?
- Quel est le rapport adapté aux deux longueurs (ou à l'angle et la longueur) en jeu ?
- Ma calculatrice est-elle en mode degrés ? Le résultat est-il vraisemblable (sin et cos dans $[0\ ;\ 1]$, tan positif pour un angle aigu) ?
- Puis-je vérifier mon résultat par la relation fondamentale ou par le théorème de Pythagore ?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

a) Triangle 1 : $\frac{2}{4} = 0{,}5$. Triangle 2 : $\frac{5}{10} = 0{,}5$. Triangle 3 : $\frac{3{,}5}{7} = 0{,}5$.

b) Les trois rapports sont égaux : l'invariance par similitude est vérifiée.

c) Ce rapport est $\sin(30°) = 0{,}5$. C'est une valeur exacte qu'il vaut la peine de retenir.

Corrigé de l'exercice 2.

a) L'hypoténuse est [AC], côté opposé à l'angle droit $\widehat{\text{ABC}}$.

b) Côté opposé à $\alpha = \widehat{\text{BAC}}$: [BC] (il ne touche pas A).

c) Côté adjacent à α : [AB] (il touche A et forme l'angle droit avec [BC]).

d) Pour l'angle $\widehat{\text{BCA}}$, l'hypoténuse reste [AC]. L'opposé devient [AB], et l'adjacent devient [BC]. L'opposé et l'adjacent **s'inversent** quand on change l'angle de référence.

Corrigé de l'exercice 3.

a) sin (les deux côtés en jeu sont l'opposé et l'hypoténuse).

b) cos (adjacent et hypoténuse).

c) tan (opposé et adjacent, sans l'hypoténuse).

d) tan (opposé et adjacent).

Corrigé de l'exercice 4.

a) $\cos(35°) = \frac{\text{AB}}{\text{AC}}$, donc $\text{AB} = \text{AC} \times \cos(35°) = 10 \times \cos(35°) \approx 8{,}2$ cm.

b) $\sin(35°) = \frac{\text{BC}}{\text{AC}}$, donc $\text{BC} = \text{AC} \times \sin(35°) = 10 \times \sin(35°) \approx 5{,}7$ cm.

c) Vérification : $\text{AB}^2 + \text{BC}^2 \approx 8{,}2^2 + 5{,}7^2 = 67{,}24 + 32{,}49 = 99{,}73 \approx 100 = \text{AC}^2$. ✓

Corrigé de l'exercice 5.

a) Par Pythagore : $\text{RT}^2 = \text{RS}^2 + \text{ST}^2 = 16 + 49 = 65$, donc $\text{RT} = \sqrt{65} \approx 8{,}06$ cm.

b) Par rapport à $\widehat{\text{SRT}}$, le côté opposé est [ST] et le côté adjacent est [RS]. On utilise tan : $\tan(\widehat{\text{SRT}}) = \frac{\text{ST}}{\text{RS}} = \frac{7}{4} = 1{,}75$. Donc $\widehat{\text{SRT}} = \tan^{-1}(1{,}75) \approx 60°$.

c) Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180° et que $\widehat{\text{RST}} = 90°$, on a $\widehat{\text{STR}} = 180° - 90° - 60° = 30°$.

Corrigé de l'exercice 6.

a) Vraisemblable.

b) Aberrant : cos d'un angle aigu est dans $[0\ ;\ 1]$.

c) Vraisemblable (tan peut prendre n'importe quelle valeur positive pour un angle aigu).

d) Aberrant : cos d'un angle aigu est positif.

e) Vraisemblable.

f) Aberrant : sin d'un angle aigu est dans $[0\ ;\ 1]$.

Corrigé de l'exercice 7.

a) D'après la relation fondamentale, $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, donc $\cos^2(\alpha) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$. L'angle étant aigu, $\cos(\alpha) > 0$, donc $\cos(\alpha) = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

b) $\alpha = \sin^{-1}(0{,}6) \approx 36{,}87°$, et $\cos(36{,}87°) \approx 0{,}8$. ✓

c) $\sin^2(\beta) = 1 - \dfrac{144}{169} = \dfrac{25}{169}$, donc $\sin(\beta) = \dfrac{5}{13}$. Puis $\tan(\beta) = \dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = \dfrac{5/13}{12/13} = \dfrac{5}{12}$.