MATHÉMATIQUES

Maîtriser les suites : récurrence et limites

Une fiche d'exercices pour rédiger une récurrence sans faille, calculer des limites et étudier une suite récurrente

Fiche de cours : Suites : récurrence et limites.

① Pourquoi cette fiche ?

Deux difficultés nouvelles apparaissent en terminale sur les suites. La première est le raisonnement par récurrence : une démonstration en deux temps où l'on vérifie un premier cas, puis où l'on montre que chaque cas entraîne le suivant. Les erreurs viennent presque toujours d'une étape oubliée ou d'une hypothèse mal posée. La seconde est la notion de limite : dire vers quoi tend u_n quand n grandit, sans se laisser piéger par les formes indéterminées, où deux termes tirent dans des sens opposés.

Cette fiche reprend chaque savoir-faire séparément : rédiger une récurrence, la démasquer quand elle est fausse, lire les limites de référence, lever une forme indéterminée, encadrer, puis étudier une suite définie par récurrence jusqu'à sa limite.

② Rédiger une récurrence

Rappel : les trois étapes

Pour prouver que $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$: **initialisation** (vérifier $\mathrm{P}(n_0)$), **hérédité** (soit $n \geqslant n_0$ fixé ; si $\mathrm{P}(n)$ est vraie, alors $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie), **conclusion**. Dans l'hérédité, on suppose la propriété pour *un* rang n, jamais « pour tout n ».

Exercice 1 *Compléter une récurrence* La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 4$. On veut montrer que pour tout entier n, $u_n = 3^{n+1} - 2$.

a) Initialisation : calculer $3^{0+1} - 2$ et comparer à u_0.

b) Hérédité : soit $n \geqslant 0$ tel que $u_n = 3^{n+1} - 2$. Exprimer u_{n+1} et montrer qu'il vaut $3^{n+2} - 2$.

c) Conclure, puis vérifier avec u_1 et u_2.

Exercice 2 *Démasquer la fausse récurrence*

a) Soit $P(n)$: « 2^n est un multiple de 3 ». Montrer que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie. La propriété $P(n)$ est-elle vraie pour tout n ? Quelle étape manque ?

b) Soit $Q(n)$: « $n^2 + n + 41$ est un nombre premier ». Vérifier $Q(0)$, $Q(1)$, $Q(2)$ et $Q(3)$. Calculer $40^2 + 40 + 41$ et conclure. Que montre cet exemple ?

Exercice 3 *Démontrer une inégalité par récurrence* Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $2^n \geqslant n + 1$.

③ Calculer des limites

Rappel : les limites de référence

n, n^2, $\sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$; $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tendent vers 0. Pour q^n : limite $+\infty$ si $q > 1$, 0 si $-1 < q < 1$, 1 si $q = 1$, pas de limite si $q \leqslant -1$.

Exercice 4 *Limites de suites géométriques* Donner la limite de chaque suite en précisant la raison q et le cas utilisé.

a) $u_n = 0{,}9^n$ b) $v_n = 1{,}01^n$ c) $w_n = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

d) $x_n = -5 \times 2^n$ e) $y_n = (-0{,}5)^n$ f) $z_n = 1^n$

Rappel : les quatre formes indéterminées

« $+\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ ». Dans ces cas, on ne peut pas conclure directement : on factorise par le terme dominant (plus grande puissance de n, ou plus grande base).

Exercice 5 *Démasquer la forme indéterminée* Pour chaque suite, dire s'il y a une forme indéterminée, puis donner la limite.

a) $a_n = n^2 + n$ b) $b_n = n^2 - n$ c) $c_n = \frac{n+1}{2n}$

d) $d_n = 3^n - 2^n$ e) $e_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ f) $f_n = n \times \frac{1}{n^2}$

④ Encadrer pour conclure

Rappel : comparaison et gendarmes

Si $u_n \leqslant v_n$ et $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$. Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ avec u_n et w_n tendant vers le même réel ℓ, alors $v_n \to \ell$. Réflexe : dès qu'apparaît $\cos(n)$, $\sin(n)$ ou $(-1)^n$, encadrer entre -1 et 1.

Exercice 6 *Encadrer* Déterminer la limite de chaque suite ($n \geqslant 1$).

a) $u_n = \dfrac{2+\cos(n)}{n}$ b) $v_n = n^2 + (-1)^n$ c) $w_n = \dfrac{5n+\sin(n)}{n}$

⑤ Étudier une suite récurrente

Rappel : la démarche complète

Encadrement par récurrence, puis sens de variation (signe de $u_{n+1}-u_n$), puis convergence par le théorème de convergence monotone, puis limite en résolvant $f(\ell)=\ell$.

Exercice 7 *Une suite croissante et majorée* La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 1$.

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Montrer par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout n.

c) Montrer que (u_n) est croissante.

d) En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

Exercice 8 *Seuil et algorithme* Une population de bactéries diminue de 20 % par heure sous l'effet d'un traitement. Elle compte 5000 individus au départ. On note u_n l'effectif après n heures.

a) Exprimer u_n en fonction de n et donner la limite de (u_n).

b) Le traitement est jugé efficace lorsque la population passe sous 100 individus. Déterminer, à l'aide d'un tableau de valeurs, le premier rang n pour lequel $u_n < 100$.

c) Écrire un algorithme qui détermine ce rang.

⑥ Pour s'auto-évaluer

Rappel : cinq questions à se poser

- Ma récurrence a-t-elle bien ses trois étapes, avec une hypothèse posée pour *un* rang n fixé ?
- Ai-je réellement *utilisé* l'hypothèse de récurrence dans l'hérédité ?
- Devant une limite, ai-je repéré s'il s'agit d'une forme indéterminée avant de conclure ?
- Pour une suite géométrique, ai-je comparé la raison à -1 et à 1 (et regardé le signe du premier terme) ?
- Pour une suite récurrente, ai-je encadré, étudié la monotonie, conclu à la convergence, puis résolu $f(\ell) = \ell$?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

a) $3^1 - 2 = 1 = u_0$: la propriété est vraie au rang 0.

b) $u_{n+1} = 3u_n + 4 = 3\left(3^{n+1} - 2\right) + 4 = 3^{n+2} - 6 + 4 = 3^{n+2} - 2$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

c) Pour tout entier n, $u_n = 3^{n+1} - 2$. Vérification : $u_1 = 3 \times 1 + 4 = 7$ et $3^2 - 2 = 7$; $u_2 = 3 \times 7 + 4 = 25$ et $3^3 - 2 = 25$. ✓

Corrigé de l'exercice 2.

a) Si $2^n = 3k$, alors $2^{n+1} = 2 \times 3k = 3 \times 2k$, multiple de 3 : l'hérédité est vraie. Pourtant P(0) est fausse ($2^0 = 1$), et P(n) est fausse pour tout n (2^n n'a que 2 comme facteur premier). Il manque l'initialisation : sans premier domino, l'hérédité ne prouve rien.

b) 41, 43, 47 et 53 sont premiers : Q(0) à Q(3) sont vraies (et Q(n) est vraie jusqu'à $n = 39$). Mais $40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$ n'est pas premier : Q(40) est fausse. Vérifier de nombreux cas particuliers ne prouve pas une propriété pour tout n : seule une hérédité démontrée le permet.

Corrigé de l'exercice 3.

Initialisation. $2^0 = 1$ et $0 + 1 = 1 : 1 \geqslant 1$, vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 0$ tel que $2^n \geqslant n+1$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geqslant 2(n+1) = 2n+2$. Or $2n+2 \geqslant n+2$ car $n \geqslant 0$. Donc $2^{n+1} \geqslant (n+1)+1$: la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $2^n \geqslant n+1$.

Corrigé de l'exercice 4.

a) $q = 0{,}9 \in]-1\ ;\ 1[$: $u_n \to 0$.

b) $q = 1{,}01 > 1$: $v_n \to +\infty$ (même une raison à peine supérieure à 1 finit par l'emporter).

c) $q = \dfrac{1}{4} : \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \to 0$, donc $w_n \to 0$.

d) $q = 2 > 1$: $2^n \to +\infty$, et le coefficient -5 est négatif, donc $x_n \to -\infty$.

e) $q = -0{,}5 \in]-1\ ;\ 1[$: $y_n \to 0$, en alternant de signe.

f) $q = 1$: $z_n = 1$ pour tout n, la suite est constante et tend vers 1.

Corrigé de l'exercice 5.

a) Pas de forme indéterminée : somme de deux suites tendant vers $+\infty$, $a_n \to +\infty$.

b) Forme « $+\infty - \infty$ ». $b_n = n^2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$, avec $n^2 \to +\infty$ et $1 - \dfrac{1}{n} \to 1$: $b_n \to +\infty$.

c) Forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ». $c_n = \dfrac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2n} = \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{2} \to \dfrac{1}{2}$.

d) Forme « $+\infty - \infty$ ». $d_n = 3^n\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$, avec $3^n \to +\infty$ et $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \to 0$: $d_n \to +\infty$.

e) Pas de forme indéterminée : $0 - 0 = 0$, $e_n \to 0$.

f) Forme « $0 \times \infty$ » en apparence, mais $f_n = \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n} \to 0$. Simplifier lève l'indétermination.

Corrigé de l'exercice 6.

a) $1 \leqslant 2 + \cos(n) \leqslant 3$, donc $\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{n}$. Les deux bornes tendent vers 0 : $u_n \to 0$.

b) $(-1)^n \geqslant -1$, donc $v_n \geqslant n^2 - 1 \to +\infty$: par comparaison, $v_n \to +\infty$.

c) $w_n = 5 + \dfrac{\sin(n)}{n}$ et $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin(n)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$, donc $\dfrac{\sin(n)}{n} \to 0$ et $w_n \to 5$.

Corrigé de l'exercice 7.

a) $u_1 = 0 + 1 = 1$; $u_2 = \dfrac{1}{2} + 1 = 1{,}5$; $u_3 = 0{,}75 + 1 = 1{,}75$.

b) Initialisation : $u_0 = 0 \in [0\ ;\ 2]$. Hérédité : soit n tel que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$; alors $0 \leqslant \dfrac{u_n}{2} \leqslant 1$ et $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$, donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. Conclusion : $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout n.

c) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{2} + 1 - u_n = 1 - \dfrac{u_n}{2} \geqslant 0$ car $u_n \leqslant 2$. La suite est croissante.

d) Croissante et majorée par 2 : elle converge vers un réel ℓ. La fonction $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$ est continue, donc $\ell = \dfrac{\ell}{2} + 1$, soit $\dfrac{\ell}{2} = 1$ et $\ell = 2$.

Corrigé de l'exercice 8.

a) Diminuer de 20 % revient à multiplier par $0{,}8$: $u_n = 5000 \times 0{,}8^n$. Comme $0 < 0{,}8 < 1$, $u_n \to 0$.

b) $u_{16} = 5000 \times 0{,}8^{16} \approx 140{,}7$; $u_{17} \approx 112{,}6$; $u_{18} \approx 90{,}1$. Le premier rang est $n = 18$: le traitement est efficace au bout de 18 heures.

c) Partir de $n = 0$ et $u = 5000$. Tant que $u \geqslant 100$, remplacer u par $0{,}8\,u$ et augmenter n de 1. Afficher n à la sortie de la boucle : on obtient 18. En Python : `n = 0; u = 5000; while u >= 100: u = 0.8 * u ; n = n + 1`.