MATHÉMATIQUES

Maîtriser les probabilités conditionnelles

Une fiche d'exercices pour calculer avec un arbre pondéré, les probabilités totales et l'indépendance

Fiche de cours : Probabilités conditionnelles.

① Pourquoi cette fiche ?

Une probabilité conditionnelle mesure la chance d'un événement *sachant* qu'un autre est réalisé. L'outil central est l'arbre pondéré, qui organise toutes les probabilités et permet de tout calculer. La difficulté majeure est de ne pas confondre $P_A(B)$ et $P_B(A)$, qui ont des dénominateurs différents et ne sont en général pas égales.

Cette fiche reprend chaque savoir-faire : calculer une probabilité conditionnelle, construire un arbre et appliquer la formule des probabilités totales, calculer une probabilité « à rebours », et reconnaître l'indépendance.

② Calculer une probabilité conditionnelle

Rappel : la formule de base

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (avec $P(A) \neq 0$). On en déduit la probabilité d'une intersection : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Exercice 1 *Appliquer la formule*

a) On donne $P(A) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. Calculer $P_A(B)$.

b) On donne $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Calculer $P_B(A)$.

c) On donne $P(A) = 0{,}6$ et $P_A(B) = 0{,}3$. Calculer $P(A \cap B)$.

③ Construire un arbre et utiliser les probabilités totales

Rappel : les deux règles de l'arbre

Sur un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités rencontrées le long de ce chemin ; la probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités des chemins qui y mènent (formule des probabilités totales).

Exercice 2 *Deux machines* Dans une usine, la machine M_1 fabrique 60 % des pièces et la machine M_2 les 40 % restants. La machine M_1 produit 5 % de pièces défectueuses, la machine M_2 en produit 8 %. On choisit une pièce au hasard et on note D l'événement « la pièce est défectueuse ».

a) Décrire l'arbre pondéré de la situation.

b) Calculer la probabilité $P(M_1 \cap D)$ qu'une pièce vienne de M_1 et soit défectueuse.

c) Calculer la probabilité $P(D)$ qu'une pièce soit défectueuse.

④ Calculer une probabilité conditionnelle à rebours

Rappel : inverser le conditionnement

Connaissant une intersection et une probabilité totale, on peut « remonter » l'arbre : $P_D(M_1) = \dfrac{P(M_1 \cap D)}{P(D)}$. Cette probabilité, souvent contre-intuitive, est différente de $P_{M_1}(D)$.

Exercice 3 *D'où vient la pièce défectueuse ?* On reprend la situation des deux machines ($P(M_1 \cap D) = 0{,}03$ et $P(D) = 0{,}062$). Une pièce prélevée est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine M_1.

⑤ Reconnaître l'indépendance

Rappel : le test de l'indépendance

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Il faut le **vérifier** : l'indépendance n'est jamais automatique.

Exercice 4 *Indépendants ou non ?* Dans chaque cas, dire si A et B sont indépendants.

a) $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$.

b) $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$.

⑥ Un problème complet

Exercice 5 *Le bus et les retards* Dans un collège, 70 % des élèves prennent le bus. Parmi ceux qui prennent le bus, 20 % arrivent en retard ; parmi les autres, 10 % arrivent en retard. On choisit un élève au hasard et on note B « l'élève prend le bus » et R « l'élève arrive en retard ».

a) Décrire l'arbre pondéré.

b) Calculer la probabilité P(R) qu'un élève arrive en retard.

c) Un élève est arrivé en retard. Calculer la probabilité qu'il ait pris le bus.

⑦ Pour s'auto-évaluer

Rappel : cinq questions à se poser

Avant et pendant un exercice de probabilités conditionnelles, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Quel est l'événement *sachant* lequel je calcule ? C'est lui qui figure au dénominateur.
- Pour une intersection, ai-je bien **multiplié** le long d'une branche, et non additionné ?
- Pour une probabilité totale, ai-je additionné **tous** les chemins qui mènent à l'événement ?
- Quand je calcule « à rebours » ($P_D(M_1)$), ai-je bien mis l'intersection au numérateur et la probabilité totale au dénominateur ?
- Pour l'indépendance, ai-je **vérifié** l'égalité $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, sans la supposer ?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

a) $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25.$

b) $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4.$

c) $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18.$

Corrigé de l'exercice 2.

a) L'arbre a deux branches principales : M_1 (probabilité 0,6) et M_2 (probabilité 0,4). De M_1 partent D (0,05) et $\overline{D}$ (0,95) ; de M_2 partent D (0,08) et $\overline{D}$ (0,92).

b) $P(M_1 \cap D) = P(M_1) \times P_{M_1}(D) = 0{,}6 \times 0{,}05 = 0{,}03.$

c) D'après la formule des probabilités totales : $P(D) = P(M_1) \times P_{M_1}(D) + P(M_2) \times P_{M_2}(D) = 0{,}03 + 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}03 + 0{,}032 = 0{,}062.$

Corrigé de l'exercice 3. $P_D(M_1) = \dfrac{P(M_1 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}03}{0{,}062} \approx 0{,}48$. Sachant qu'une pièce est défectueuse, elle a environ 48 % de chances de venir de M_1 (et donc environ 52 % de venir de M_2, bien que M_2 fabrique moins de pièces : c'est parce que M_2 est plus souvent défectueuse).

Corrigé de l'exercice 4.

a) $P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2 = P(A \cap B)$: les événements sont indépendants.

b) $P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18 \neq 0{,}2 = P(A \cap B)$: les événements ne sont pas indépendants.

Corrigé de l'exercice 5.

a) Deux branches principales : B (0,7) et $\overline{B}$ (0,3). De B partent R (0,2) et $\overline{R}$ (0,8) ; de $\overline{B}$ partent R (0,1) et $\overline{R}$ (0,9).

b) $P(R) = 0{,}7 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}14 + 0{,}03 = 0{,}17.$

c) $P_R(B) = \dfrac{P(B \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}14}{0{,}17} \approx 0{,}82$. Sachant qu'un élève est en retard, il a environ 82 % de chances d'avoir pris le bus.