MATHÉMATIQUES

Maîtriser la loi binomiale

Une fiche d'exercices pour reconnaître un schéma de Bernoulli, manier les coefficients binomiaux et calculer des probabilités

Fiche de cours : La loi binomiale.

① Pourquoi cette fiche ?

La loi binomiale est le premier modèle probabiliste que l'on applique « en série » : répéter une expérience à deux issues et compter les succès. Les erreurs viennent rarement de la formule elle-même ; elles viennent d'un modèle appliqué hors de ses conditions (tirages sans remise), d'un coefficient binomial oublié, ou d'un événement mal traduit (« au moins », « au plus », « moins de »).

Cette fiche isole chaque geste : reconnaître le modèle, construire et lire le triangle de Pascal, démasquer les erreurs fréquentes, calculer avec la formule, traduire un événement pour la calculatrice, utiliser l'espérance et l'écart-type, puis résoudre deux problèmes concrets, dont l'un fait appel au logarithme.

② Reconnaître le modèle

Rappel : les trois conditions

Une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ modélise le nombre de succès lorsque : chaque épreuve a **deux issues** ; les n épreuves sont **identiques** (même p) ; elles sont **indépendantes**. Un tirage sans remise fait tomber les deux dernières conditions.

Exercice 1 *Épreuve, schéma, ou ni l'un ni l'autre ?* Pour chaque situation, dire s'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, d'un schéma de Bernoulli (préciser alors n et p), ou ni l'un ni l'autre.

a) Lancer une pièce équilibrée et regarder si l'on obtient « pile ».

b) Lancer huit pièces équilibrées et compter les « pile ».

c) Tirer trois cartes sans remise et compter les rois.

d) Cinquante clients, indépendamment les uns des autres, achètent un produit avec la probabilité 0,3 ; on compte les acheteurs.

e) Mesurer la taille d'un élève choisi au hasard.

f) Répondre au hasard à un questionnaire de 20 questions « vrai ou faux » et compter les bonnes réponses.

③ Coefficients binomiaux

Rappel : le triangle de Pascal

Chaque ligne commence et finit par 1 ; chaque autre nombre est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui. La ligne n donne $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$, et sa somme vaut 2^n (nombre total de chemins de l'arbre).

Exercice 2 *Construire le triangle de Pascal* La ligne $n = 6$ du triangle est 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

a) Écrire les lignes $n = 7$ et $n = 8$.

b) En déduire $\binom{8}{3}$ et $\binom{7}{4}$.

c) Calculer la somme des nombres de la ligne 7 et interpréter le résultat.

Exercice 3 *Démasquer l'erreur* Chaque affirmation contient une erreur. La repérer et la corriger.

a) « $\binom{6}{2} = \dfrac{6^2}{2} = 18.$ »

b) « Si X suit $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$, alors $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = p^2(1-p)^{n-2}$. »

c) « $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 2) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1)$. »

d) « Si X suit $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$, alors $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = np$. »

④ Calculer des probabilités

Rappel : la formule et la calculatrice

$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. La calculatrice donne $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant k)$; tout autre événement se ramène à ces deux formes : $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant k) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant k-1)$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} < k) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant k-1)$, $\mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant b) - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant a-1)$.

Exercice 4 *Calculer avec la formule* X suit la loi $\mathcal{B}(5\ ;\ 0{,}3)$. Calculer, en détaillant, puis arrondir au millième :

a) $P(X = 0)$ b) $P(X = 1)$ c) $P(X = 2)$
d) $P(X = 5)$ e) $P(X \leqslant 2)$ f) $P(X \geqslant 3)$

Exercice 5 *Traduire un événement* X suit une loi binomiale. Pour chaque événement, écrire l'inégalité correspondante avec X, puis l'exprimer uniquement à l'aide de probabilités de la forme $P(X \leqslant k)$, comme le demande la calculatrice.

a) « au moins 3 succès » b) « au plus 4 succès »
c) « moins de 2 succès » d) « plus de 5 succès »
e) « entre 2 et 5 succès, inclus » f) « aucun succès »

5 Espérance et écart-type

Exercice 6 *Paramètres et indicateurs*

a) X suit $\mathcal{B}(100\ ;\ 0{,}1)$. Calculer E(X) et $\sigma(X)$.

b) Y suit $\mathcal{B}(60\ ;\ 0{,}5)$. Calculer E(Y) et $\sigma(Y)$ (arrondir au centième).

c) Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ avec $E(Z) = 15$ et $V(Z) = 12$. Déterminer p puis n.

6 Problèmes en contexte

Exercice 7 *Des ampoules par boîte de douze* Un fabricant produit des ampoules dont 5 % sont défectueuses. Elles sont vendues par boîtes de 12, constituées au hasard dans une production très importante. On note X le nombre d'ampoules défectueuses d'une boîte.

a) Justifier que X suit $\mathcal{B}(12\ ;\ 0{,}05)$.

b) Calculer la probabilité qu'une boîte ne contienne aucune ampoule défectueuse, puis qu'elle en contienne au moins une (arrondir au millième).

c) Le fabricant rembourse toute boîte contenant au moins deux ampoules défectueuses. Calculer la probabilité de remboursement. Sur 1000 boîtes vendues, combien de remboursements peut-on prévoir ?

d) Calculer E(X).

Exercice 8 *Combien de tickets acheter ?* Un ticket de tombola est gagnant avec la probabilité 0,05, indépendamment des autres. On achète n tickets et X compte les tickets gagnants.

a) Exprimer $P(X \geqslant 1)$ en fonction de n.

b) Combien de tickets faut-il acheter au minimum pour avoir au moins une chance sur deux de gagner ? Résoudre avec le logarithme, puis vérifier.

c) Même question pour avoir au moins 95 % de chances de gagner.

⑦ Pour s'auto-évaluer

Rappel : cinq questions à se poser

- Ai-je vérifié les trois conditions (deux issues, épreuves identiques, indépendance) avant d'écrire $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$?
- Ai-je écrit ce que compte X et la valeur de n et de p ?
- Dans $P(X = k)$, ai-je bien mis le coefficient binomial, p^k et $(1-p)^{n-k}$?
- Ai-je traduit « au moins », « au plus », « moins de » par la bonne inégalité, et pensé au complémentaire ?
- Ai-je distingué $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

a) Épreuve de Bernoulli, $p = 0{,}5$.

b) Schéma de Bernoulli, $n = 8$, $p = 0{,}5$: les pièces sont identiques et indépendantes.

c) Ni l'un ni l'autre : sans remise, la probabilité de tirer un roi change à chaque carte.

d) Schéma de Bernoulli, $n = 50$, $p = 0{,}3$ (succès « le client achète »).

e) Ni l'un ni l'autre : une taille n'est pas une issue binaire.

f) Schéma de Bernoulli, $n = 20$, $p = 0{,}5$.

Corrigé de l'exercice 2.

a) Ligne 7 : $1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$. Ligne 8 : $1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1$.

b) $\binom{8}{3} = 56$ (quatrième nombre de la ligne 8) et $\binom{7}{4} = 35$.

c) $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$: c'est le nombre total de chemins d'un arbre à 7 épreuves, chaque épreuve doublant le nombre de chemins.

Corrigé de l'exercice 3.

a) $\binom{6}{2} = \dfrac{6!}{2!\,4!} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15$. Un coefficient binomial n'est pas une puissance.

b) Il manque le nombre de chemins : $\mathrm{P}(X = 2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$.

c) Le contraire de $X \geqslant 2$ est $X \leqslant 1$, qui regroupe $X = 0$ et $X = 1$: $\mathrm{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathrm{P}(X \leqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) - \mathrm{P}(X = 1)$.

d) np est l'espérance ; la variance est $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$.

Corrigé de l'exercice 4.

a) $\mathrm{P}(X = 0) = 0{,}7^5 \approx 0{,}168$.

b) $\mathrm{P}(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0{,}3 \times 0{,}7^4 = 5 \times 0{,}3 \times 0{,}2401 \approx 0{,}360$.

c) $\mathrm{P}(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^3 = 10 \times 0{,}09 \times 0{,}343 \approx 0{,}309$.

d) $\mathrm{P}(X = 5) = 0{,}3^5 \approx 0{,}002$.

e) $\mathrm{P}(X \leqslant 2) = \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2) \approx 0{,}168 + 0{,}360 + 0{,}309 = 0{,}837$.

f) $\mathrm{P}(X \geqslant 3) = 1 - \mathrm{P}(X \leqslant 2) \approx 1 - 0{,}837 = 0{,}163$.

Corrigé de l'exercice 5.

a) $X \geqslant 3$: $\mathrm{P}(X \geqslant 3) = 1 - \mathrm{P}(X \leqslant 2)$.

b) $X \leqslant 4$: directement $P(X \leqslant 4)$.

c) $X < 2$, soit $X \leqslant 1$: $P(X \leqslant 1)$.

d) $X > 5$, soit $X \geqslant 6$: $1 - P(X \leqslant 5)$.

e) $2 \leqslant X \leqslant 5$: $P(X \leqslant 5) - P(X \leqslant 1)$.

f) $X = 0$: $P(X \leqslant 0)$, c'est-à-dire $(1-p)^n$.

Corrigé de l'exercice 6.

a) $E(X) = 100 \times 0{,}1 = 10$; $V(X) = 100 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 9$, donc $\sigma(X) = 3$.

b) $E(Y) = 60 \times 0{,}5 = 30$; $V(Y) = 60 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 15$, donc $\sigma(Y) = \sqrt{15} \approx 3{,}87$.

c) $np = 15$ et $np(1-p) = 12$, donc $15(1-p) = 12$, d'où $1 - p = 0{,}8$ et $p = 0{,}2$. Alors $n = \dfrac{15}{0{,}2} = 75$.

Corrigé de l'exercice 7.

a) Chaque ampoule est défectueuse (succès, $p = 0{,}05$) ou non ; la production étant très importante, les 12 ampoules d'une boîte sont assimilées à des épreuves identiques et indépendantes. X suit $\mathcal{B}(12\ ;\ 0{,}05)$.

b) $P(X = 0) = 0{,}95^{12} \approx 0{,}540$ et $P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}540 = 0{,}460$.

c) $P(X = 1) = 12 \times 0{,}05 \times 0{,}95^{11} \approx 0{,}341$, donc $P(X \leqslant 1) \approx 0{,}881$ et $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}119$. Sur 1000 boîtes, on prévoit environ 119 remboursements.

d) $E(X) = 12 \times 0{,}05 = 0{,}6$ ampoule défectueuse par boîte en moyenne.

Corrigé de l'exercice 8.

a) X suit $\mathcal{B}(n\ ;\ 0{,}05)$ et $P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}95^n$.

b) $1 - 0{,}95^n \geqslant 0{,}5 \iff 0{,}95^n \leqslant 0{,}5 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}95} \approx 13{,}5$ (sens changé car $\ln 0{,}95 < 0$). Il faut 14 tickets. Vérification : $0{,}95^{13} \approx 0{,}513$ et $0{,}95^{14} \approx 0{,}488$.

c) $0{,}95^n \leqslant 0{,}05 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}95} \approx 58{,}4$: il faut 59 tickets. Passer de une chance sur deux à 95 % demande plus de quatre fois plus de tickets.