MATHÉMATIQUES

Maîtriser la fonction logarithme

Une fiche d'exercices pour calculer avec le logarithme, résoudre les équations où l'inconnue est en exposant et étudier une fonction

Fiche de cours : La fonction logarithme népérien.

① Pourquoi cette fiche ?

Le logarithme népérien est la fonction réciproque de l'exponentielle : $\ln x$ est l'exposant à donner à e pour obtenir x. Les élèves le manipulent souvent avec des règles inventées par analogie, comme $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$, ou oublient qu'il n'est défini que pour des nombres strictement positifs. Cette fiche démonte ces automatismes et installe les bons : passer d'une écriture exponentielle à une écriture logarithmique, utiliser les propriétés du produit, du quotient et de la puissance, résoudre une équation ou une inéquation en respectant le domaine, puis dériver et étudier une fonction où intervient le logarithme.

② Passer de l'exponentielle au logarithme

Rappel : la définition, dans les deux sens

Pour $x > 0$ et y réel, $\ln x = y \iff x = \mathrm{e}^y$. Donc $\ln 1 = 0$, $\ln \mathrm{e} = 1$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$) et $\ln(\mathrm{e}^y) = y$ (pour tout y).

Exercice 1 *Traduire dans les deux sens*

a) Compléter à l'aide de la définition : $\mathrm{e}^2 \approx 7{,}39$, donc $\ln 7{,}39 \approx \ldots$; $\mathrm{e}^0 = 1$, donc $\ln \ldots = \ldots$; $\ln 20 \approx 3$, donc $\mathrm{e}^3 \approx \ldots$

b) Résoudre $\mathrm{e}^x = 10$, $\mathrm{e}^x = 1$, $\ln x = -1$ et $\ln x = 0$ (valeurs exactes, puis arrondis au centième).

Exercice 2 *Démasquer les fausses règles* Pour chaque égalité, dire si elle est vraie pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$. Si elle est fausse, donner un contre-exemple numérique.

a) $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$

b) $\ln(2a) = 2\ln a$

c) $\ln\left(a^2\right) = 2\ln a$

d) $\dfrac{\ln a}{\ln b} = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$

e) $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$

f) $(\ln a)^2 = 2\ln a$

③ Calculer avec les propriétés

Rappel : les règles à utiliser

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$, $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$. Réflexe : décomposer le nombre en produit de facteurs premiers.

Exercice 3 *Exprimer avec* $\ln 2$ *et* $\ln 5$ Écrire chaque nombre en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

a) $A = \ln 10$

b) $B = \ln 50$

c) $C = \ln 0{,}4$

d) $D = \ln 1{,}6$

e) $E = \ln\sqrt{20}$

f) $F = \ln 0{,}25$

④ Résoudre en respectant le domaine

Rappel : la condition d'existence d'abord

On écrit l'ensemble des x pour lesquels chaque logarithme est défini (argument strictement positif), on résout, puis on rejette les solutions hors de cet ensemble. Ensuite : $\ln a = \ln b \iff a = b$ et $\ln a < \ln b \iff a < b$ pour $a, b > 0$.

Exercice 4 *Équations et inéquations avec le domaine*

a) $\ln(x+1) = \ln(3-x)$

b) $\ln\left(x^2\right) = \ln(x+6)$

c) $2\ln x = \ln 9$

d) $\ln(x-1) < 2$

Exercice 5 *Inconnue en exposant* Résoudre, puis donner le premier entier solution lorsque l'inconnue est un entier n.

a) $2^n \geqslant 1000$ b) $0{,}9^n \leqslant 0{,}5$

c) $5 \times 1{,}02^n > 8$ d) $\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0{,}5$ (t réel)

5 Dériver et étudier

Rappel : les formules

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ et $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$ pour $u > 0$. Les formules du produit et du quotient s'appliquent comme d'habitude.

Exercice 6 *Dériver* Dériver chaque fonction sur $]0\,;+\infty[$ (sur $\left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$ pour g).

a) $f(x) = \ln x + x^2$ b) $g(x) = \ln(3x-1)$ c) $h(x) = x^2 \ln x$

d) $k(x) = \ln\left(x^2+4\right)$ e) $m(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ f) $n(x) = \mathrm{e}^x \ln x$

Exercice 7 *Étude complète* Soit $f(x) = \ln x - x + 2$, définie sur $]0\,;+\infty[$.

a) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{1-x}{x}$. Dresser le tableau de variations de f.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha < \beta$, et en donner un encadrement d'amplitude 0,1.

Exercice 8 *Dépréciation d'un véhicule* Un véhicule acheté 20 000 € perd 15 % de sa valeur chaque année. On note V_n sa valeur au bout de n années.

a) Exprimer V_n en fonction de n.

b) Au bout de combien d'années la valeur passe-t-elle sous la moitié du prix d'achat ? Sous le quart ?

c) Que remarque-t-on entre ces deux durées ? L'expliquer avec les propriétés du logarithme.

⑥ Pour s'auto-évaluer

Rappel : cinq questions à se poser

- Ai-je écrit la condition d'existence (arguments strictement positifs) avant de résoudre ?
- Suis-je sûr de ne pas avoir utilisé une règle inventée pour $\ln(a+b)$ ou pour un quotient de logarithmes ?
- En divisant par $\ln q$, ai-je regardé son signe pour décider si l'inégalité change de sens ?
- Pour dériver $\ln u$, ai-je bien écrit $\dfrac{u'}{u}$ avec le u' au numérateur ?
- Devant une limite avec $\ln x$ et x, ai-je pensé aux croissances comparées ?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

a) $\ln 7{,}39 \approx 2$; $\ln 1 = 0$; $e^3 \approx 20$.

b) $e^x = 10 \iff x = \ln 10 \approx 2{,}30$; $e^x = 1 \iff x = \ln 1 = 0$; $\ln x = -1 \iff x = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}37$; $\ln x = 0 \iff x = e^0 = 1$.

Corrigé de l'exercice 2.

a) **Fausse.** $a = b = 1$: $\ln 2 \approx 0{,}69$ mais $\ln 1 + \ln 1 = 0$.

b) **Fausse.** $\ln(2a) = \ln 2 + \ln a$; avec $a = 1$: $\ln 2 \approx 0{,}69$ mais $2\ln 1 = 0$.

c) **Vraie.** C'est la règle de la puissance, $\ln(a^n) = n \ln a$.

d) **Fausse.** $a = e^2$, $b = e$: $\dfrac{\ln a}{\ln b} = \dfrac{2}{1} = 2$ mais $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln e = 1$. Un quotient de logarithmes ne se simplifie pas.

e) **Vraie.** $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = \ln 1 - \ln a = -\ln a$.

f) **Fausse.** $(\ln a)^2$ est le carré du nombre $\ln a$, alors que $2\ln a = \ln\left(a^2\right)$; avec $a = e$: $1^2 = 1$ mais $2 \times 1 = 2$.

Corrigé de l'exercice 3.

a) $A = \ln(2 \times 5) = \ln 2 + \ln 5$.

b) $B = \ln\left(2 \times 5^2\right) = \ln 2 + 2\ln 5$.

c) $C = \ln\left(\dfrac{2}{5}\right) = \ln 2 - \ln 5$.

d) $D = \ln\left(\dfrac{8}{5}\right) = \ln\left(2^3\right) - \ln 5 = 3\ln 2 - \ln 5$.

e) $E = \dfrac{1}{2}\ln 20 = \dfrac{1}{2}\ln\left(2^2 \times 5\right) = \dfrac{1}{2}(2\ln 2 + \ln 5) = \ln 2 + \dfrac{1}{2}\ln 5$.

f) $F = \ln\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\ln\left(2^2\right) = -2\ln 2$.

Corrigé de l'exercice 4.

a) Conditions : $x > -1$ et $x < 3$. Alors $x + 1 = 3 - x \iff x = 1$, qui convient. $S = \{1\}$.

b) Conditions : $x^2 > 0$ (donc $x \neq 0$) et $x > -6$. Alors $x^2 = x + 6 \iff x^2 - x - 6 = 0 \iff x = 3$ ou $x = -2$. Les deux vérifient les conditions ($(-2)^2 = 4 = -2 + 6$). $S = \{-2\ ;\ 3\}$. Attention : écrire $\ln\left(x^2\right) = 2\ln x$ aurait imposé $x > 0$ et fait perdre la solution -2.

c) Condition : $x > 0$. $2\ln x = \ln\left(x^2\right) = \ln 9 \iff x^2 = 9 \iff x = 3$ (car $x > 0$). $S = \{3\}$.

d) Condition : $x > 1$. $\ln(x-1) < 2 = \ln\left(e^2\right) \iff x - 1 < e^2 \iff x < 1 + e^2$. $S =]1\ ;\ 1 + e^2[$, soit environ $]1\ ;\ 8{,}39[$.

Corrigé de l'exercice 5.

a) $n \ln 2 \geqslant \ln 1000 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 1000}{\ln 2} \approx 9{,}97$ ($\ln 2 > 0$). Premier entier : $n = 10$ ($2^{10} = 1024$).

b) $n \ln 0{,}9 \leqslant \ln 0{,}5 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9} \approx 6{,}58$, le sens change car $\ln 0{,}9 < 0$. Premier entier : $n = 7$.

c) $1{,}02^n > 1{,}6 \iff n > \dfrac{\ln 1{,}6}{\ln 1{,}02} \approx 23{,}7$. Premier entier : $n = 24$.

d) $-0{,}2t = \ln 0{,}5 \iff t = \dfrac{\ln 0{,}5}{-0{,}2} = -5 \ln 0{,}5 = 5 \ln 2 \approx 3{,}47$. C'est un temps de demi-vie : la quantité $\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ est divisée par deux tous les 3,47 unités de temps.

Corrigé de l'exercice 6.

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 2x$.

b) $u = 3x - 1$, $u' = 3$: $g'(x) = \dfrac{3}{3x-1}$.

c) Produit : $h'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$.

d) $u = x^2 + 4$, $u' = 2x$: $k'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$.

e) Quotient : $m'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \dfrac{x - 2x \ln x}{x^4} = \dfrac{1 - 2 \ln x}{x^3}$.

f) Produit : $n'(x) = \mathrm{e}^x \ln x + \mathrm{e}^x \times \dfrac{1}{x} = \mathrm{e}^x \left(\ln x + \dfrac{1}{x} \right)$.

Corrigé de l'exercice 7.

a) En 0^+ : $\ln x \to -\infty$ et $-x + 2 \to 2$, donc $f(x) \to -\infty$. En $+\infty$: forme « $+\infty - \infty$ » ; $f(x) = x \left(\dfrac{\ln x}{x} - 1 + \dfrac{2}{x} \right)$ avec $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ (croissances comparées), donc la parenthèse tend vers -1 et $f(x) \to -\infty$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$. Le dénominateur est positif ; $1 - x > 0 \iff x < 1$. f est croissante sur $]0\ ;\ 1]$, décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$, avec un maximum $f(1) = 0 - 1 + 2 = 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	1	↘	$-\infty$

c) Sur $]0\ ;\ 1]$, f est continue, strictement croissante, de limite $-\infty$ en 0^+ à $f(1) = 1 > 0$: une unique solution α. Sur $[1\ ;\ +\infty[$, f est continue, strictement décroissante, de $1 > 0$ à $-\infty$: une unique solution β. Encadrements : $f(0{,}1) \approx -0{,}40 < 0$ et $f(0{,}2) \approx 0{,}19 > 0$, donc $0{,}1 < \alpha < 0{,}2$; $f(3{,}1) \approx 0{,}03 > 0$ et $f(3{,}2) \approx -0{,}04 < 0$, donc $3{,}1 < \beta < 3{,}2$.

Corrigé de l'exercice 8.

a) Perdre 15 % revient à multiplier par 0,85 : $V_n = 20\,000 \times 0{,}85^n$.

b) Moitié : $0{,}85^n < 0{,}5 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}85} \approx 4{,}3$ (sens changé, $\ln 0{,}85 < 0$) : 5 ans. Quart : $0{,}85^n < 0{,}25 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}85} \approx 8{,}5$: 9 ans.

c) La seconde durée est le double de la première (avant arrondi) : $\ln 0{,}25 = \ln\left(0{,}5^2\right) = 2\ln 0{,}5$, donc $\dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}85} = 2 \times \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}85}$. Diviser par 4, c'est diviser deux fois par 2 : le temps nécessaire double.