MATHÉMATIQUES

Maîtriser les limites de fonctions

Une fiche d'exercices pour calculer des limites, reconnaître les formes indéterminées et utiliser la continuité

Fiche de cours : Limites de fonctions et continuité.

① Pourquoi cette fiche ?

Calculer une limite, c'est décrire ce que fait une fonction aux bords de son domaine : très loin vers la droite ou la gauche, ou tout près d'une valeur interdite. Les erreurs viennent rarement des limites de référence elles-mêmes ; elles viennent d'une conclusion trop rapide devant une forme indéterminée, d'un signe de dénominateur oublié, ou d'un théorème appliqué sans vérifier ses hypothèses.

Cette fiche isole chaque geste : lire une limite de référence, reconnaître une forme indéterminée, la lever par le terme dominant ou par les croissances comparées, traiter une valeur interdite avec un tableau de signes, encadrer, puis mobiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

② Limites de référence

Rappel : à connaître par cœur

En $+\infty$: $x^n \to +\infty$, $\dfrac{1}{x^n} \to 0$, $\sqrt{x} \to +\infty$, $\mathrm{e}^x \to +\infty$. En $-\infty$: $x^n \to +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair ; $\dfrac{1}{x^n} \to 0$; $\mathrm{e}^x \to 0$. En 0 : $\dfrac{1}{x} \to -\infty$ à gauche et $+\infty$ à droite ; $\dfrac{1}{x^2} \to +\infty$ des deux côtés.

Exercice 1 *Limites de référence* Donner chaque limite.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x^3\right)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x$ h) $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x}$

③ Reconnaître et lever une forme indéterminée

Rappel : les quatre formes indéterminées

« $+\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ ». Tout le reste se conclut directement. Pour lever : factoriser par le terme dominant, simplifier, ou utiliser les croissances comparées (e^x l'emporte sur x^n).

Exercice 2 *Démasquer la forme indéterminée* Pour chaque limite en $+\infty$, dire s'il y a une forme indéterminée (et laquelle), puis conclure.

a) $x^2 + e^x$ b) $x^3 - x^2$ c) $\dfrac{x+1}{x^2}$

d) $\dfrac{e^x}{x}$ e) $x \times \dfrac{1}{x}$ f) $5 - \dfrac{1}{x}$

Exercice 3 *Quotients de polynômes en l'infini* Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

a) $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2+2}$ b) $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

c) $h(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$ d) $k(x) = \dfrac{2x-1}{4x+3}$

Exercice 4 *Croissances comparées* Déterminer chaque limite.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - x^2\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 + e^{-x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x + e^x\right)$

④ Valeurs interdites et asymptotes

Rappel : le signe du dénominateur décide

Quand le numérateur tend vers un réel non nul et le dénominateur vers 0, la limite est infinie : son signe se lit dans le tableau de signes du dénominateur, à gauche et à droite de la valeur interdite. Si numérateur et dénominateur tendent tous deux vers 0, c'est une forme « $\frac{0}{0}$ » : simplifier d'abord.

Exercice 5 *Limite en une valeur interdite*

a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$: limites à gauche et à droite de 1.

b) $g(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$: limites à gauche et à droite de 1, puis asymptotes de la courbe.

c) $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$: limite en 1. La courbe admet-elle une asymptote verticale ?

Exercice 6 *Toutes les asymptotes d'une fonction* Soit $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x^2-1}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire une asymptote.

c) Calculer les limites de f à gauche et à droite de 1, puis de -1. En déduire deux asymptotes.

⑤ Encadrer et utiliser la continuité

Exercice 7 *Encadrer* Déterminer chaque limite en $+\infty$.

a) $\dfrac{\sin(x)}{x^2}$ b) $x^2 + \cos(x)$ c) $\dfrac{3x + \sin(x)}{x}$

Rappel : le théorème des valeurs intermédiaires

f continue sur $[a\ ;\ b]$ et k compris entre $f(a)$ et $f(b)$: l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans $[a\ ;\ b]$. Si f est de plus strictement monotone, la solution est unique. Continuité pour l'existence, stricte monotonie pour l'unicité.

Exercice 8 *Existence et unicité d'une solution* Soit $f(x) = x^3 + 2x - 5$ sur $\mathbb{R}$.

a) Étudier le sens de variation de f et donner ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $\alpha \in [1\ ;\ 2]$, puis donner un encadrement d'amplitude 0,1.

⑥ Pour s'auto-évaluer

Rappel : cinq questions à se poser

- Avant de conclure, ai-je vérifié si la limite est l'une des quatre formes indéterminées ?
- En l'infini, ai-je repéré le terme dominant (ou pensé aux croissances comparées si une exponentielle intervient) ?
- En une valeur interdite, ai-je écrit le signe du dénominateur à gauche *et* à droite ?
- Ai-je précisé pour chaque asymptote horizontale en quel infini elle est valable ?
- Pour le théorème des valeurs intermédiaires, ai-je justifié la continuité (existence) et la stricte monotonie (unicité) ?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

a) 0.

b) $+\infty$.

c) $-\infty$ (opposé de $x^3 \to +\infty$).

d) $+\infty$.

e) $+\infty$ (exposant pair : x^2 est positif).

f) $-\infty$ (exposant impair : x^3 garde le signe de x).

g) 0.

h) $-\infty$ (à gauche de 0, x est négatif et proche de 0).

Corrigé de l'exercice 2.

a) Pas de forme indéterminée : somme de deux termes tendant vers $+\infty$, limite $+\infty$.

b) « $+\infty - \infty$ ». $x^3 - x^2 = x^3\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \to +\infty$.

c) « $\frac{\infty}{\infty}$ ». $\dfrac{x+1}{x^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} \to 0$.

d) « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Croissances comparées : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \to +\infty$.

e) « $\infty \times 0$ » en apparence, mais $x \times \dfrac{1}{x} = 1$ pour tout $x \neq 0$: la limite est 1.

f) Pas de forme indéterminée : $5 - 0 = 5$.

Corrigé de l'exercice 3. Dans chaque cas, la limite en l'infini est celle du quotient des termes de plus haut degré.

a) $\dfrac{3x^2}{x^2} = 3$: $f(x) \to 3$ en $+\infty$ et en $-\infty$ (asymptote horizontale $y = 3$).

b) $\dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \to 0$: $g(x) \to 0$ dans les deux cas (asymptote horizontale $y = 0$).

c) $\dfrac{x^3}{x} = x^2 \to +\infty$: $h(x) \to +\infty$ en $+\infty$ comme en $-\infty$.

d) $\dfrac{2x}{4x} = \dfrac{1}{2}$: $k(x) \to \dfrac{1}{2}$ dans les deux cas.

Corrigé de l'exercice 4.

a) $+\infty$: l'exponentielle l'emporte sur x^3.

b) $x^2\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} \to 0$.

c) $e^x - x^2 = e^x\left(1 - \dfrac{x^2}{e^x}\right)$, avec $\dfrac{x^2}{e^x} \to 0$: limite $+\infty$.

d) Forme « $-\infty \times 0$ » ; par croissances comparées, $xe^x \to 0$ en $-\infty$.

e) $e^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, donc la limite est 2 (asymptote horizontale $y = 2$).

f) Pas de forme indéterminée : $x \to -\infty$ et $e^x \to 0$, donc la limite est $-\infty$.

Corrigé de l'exercice 5.

a) $(x-1)^2 > 0$ des deux côtés de 1 et tend vers 0 : $f(x) \to +\infty$ à gauche comme à droite. Asymptote verticale $x = 1$.

b) Le numérateur tend vers $3 > 0$. Pour $x < 1$, $1 - x > 0$, donc $g(x) \to +\infty$; pour $x > 1$, $1 - x < 0$, donc $g(x) \to -\infty$. Asymptote verticale $x = 1$. En l'infini, $\dfrac{x}{-x} = -1$: asymptote horizontale $y = -1$.

c) Forme « $\frac{0}{0}$ ». Pour $x \neq 1$, $h(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$, donc $h(x) \to 2$. Pas d'asymptote verticale : la limite est finie, la courbe a simplement un « trou » en $x = 1$.

Corrigé de l'exercice 6.

a) $x^2 - 1 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -1$: f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 1\}$.

b) Quotient des termes dominants $\dfrac{2x^2}{x^2} = 2$: $f(x) \to 2$ en $+\infty$ et en $-\infty$. La droite $y = 2$ est asymptote horizontale.

c) En 1, le numérateur tend vers $2 - 3 = -1 < 0$. Le dénominateur $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ est négatif sur $]-1\ ;\ 1[$ et positif à l'extérieur. Donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ (négatif sur négatif) et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$. En -1, même numérateur -1 : $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ (dénominateur positif) et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$. Les droites $x = 1$ et $x = -1$ sont asymptotes verticales.

Corrigé de l'exercice 7.

a) $-\dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, bornes de limite 0 : la limite est 0 (gendarmes).

b) $x^2 + \cos(x) \geqslant x^2 - 1 \to +\infty$: la limite est $+\infty$ (comparaison).

c) $\dfrac{3x + \sin(x)}{x} = 3 + \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $\dfrac{\sin(x)}{x} \to 0$ par encadrement : la limite est 3.

Corrigé de l'exercice 8.

a) $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Terme dominant x^3 : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) f est continue (polynôme), strictement croissante, et prend des valeurs négatives et positives : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

c) $f(1) = 1 + 2 - 5 = -2 < 0$ et $f(2) = 8 + 4 - 5 = 7 > 0$, donc $\alpha \in [1\ ;\ 2]$. À la calculatrice, $f(1{,}3) \approx -0{,}20 < 0$ et $f(1{,}4) \approx 0{,}54 > 0$, donc $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$.