MATHÉMATIQUES

Maîtriser les primitives et les intégrales

Une fiche d'exercices pour remonter d'une dérivée à une primitive, calculer une intégrale et interpréter une aire

Fiche de cours : Primitives et intégrales.

① Pourquoi cette fiche ?

Chercher une primitive, c'est dériver à l'envers : la plupart des erreurs viennent de ce renversement, quand on dérive au lieu de remonter, quand on oublie le coefficient qui compense la dérivée intérieure, ou quand on confond $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$. Calculer une intégrale ajoute une seule étape, $F(b) - F(a)$, mais demande de garder le sens des signes : une intégrale peut être négative alors qu'une aire ne l'est jamais.

Cette fiche isole chaque geste : les primitives usuelles, la détection des erreurs classiques, la reconnaissance des formes $u' \, g(u)$, le choix de la primitive qui vérifie une condition, le calcul d'intégrales, les aires, les propriétés, puis un problème où l'intégrale mesure une quantité accumulée.

② Remonter d'une dérivée à une primitive

Rappel : le réflexe de vérification

Une primitive proposée se vérifie toujours en la dérivant : on doit retrouver exactement la fonction de départ. Ce contrôle prend dix secondes et élimine la quasi-totalité des erreurs.

Exercice 1 *Primitives usuelles* Donner une primitive de chaque fonction (sur $]0 ; +\infty[$ lorsque c'est nécessaire).

a) $f(x) = x^5$ b) $g(x) = 3$ c) $h(x) = \frac{1}{x^2}$

d) $k(x) = \mathrm{e}^x$ e) $m(x) = \frac{1}{x}$ f) $n(x) = 4x^3 - 2x + 7$

Exercice 2 *Démasquer l'erreur* Chaque affirmation contient une erreur. La repérer, l'expliquer, puis donner une primitive correcte.

a) « Une primitive de x^2 est $2x$. »

b) « Une primitive de e^{5x} est e^{5x}. »

c) « Une primitive de $\dfrac{1}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ est $-\dfrac{1}{x^2}$. »

d) « Une primitive de $(2x+3)^4$ est $\dfrac{(2x+3)^5}{5}$. »

Rappel : reconnaître la forme $u'\,g(u)$

Repérer une fonction « intérieure » u, calculer u', vérifier qu'il apparaît en facteur (à un coefficient près). Formes à connaître : $u'e^u \to e^u$; $\dfrac{u'}{u} \to \ln u$ $(u>0)$; $u'u^n \to \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$; $\dfrac{u'}{u^2} \to -\dfrac{1}{u}$.

Exercice 3 *Reconnaître la forme $u'\,g(u)$* Donner une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = 3x^2\,e^{x^3}$ sur $\mathbb{R}$

c) $h(x) = 2x\left(x^2+1\right)^3$ sur $\mathbb{R}$

d) $k(x) = \dfrac{1}{3x-2}$ sur $\left]\dfrac{2}{3}\ ;\ +\infty\right[$

e) $m(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

f) $n(x) = \dfrac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 *La primitive qui vérifie une condition*

a) Déterminer la primitive F de $f(x) = 3x^2 - 1$ telle que $F(1) = 0$.

b) Déterminer la primitive G de $g(x) = e^{2x}$ telle que $G(0) = 1$.

c) Déterminer la primitive H de $h(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ telle que $H(e) = 3$.

③ Calculer des intégrales et des aires

Rappel : le théorème fondamental

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$: on écrit la primitive entre crochets, puis borne du haut moins borne du bas. Si $f \geqslant 0$, c'est l'aire sous la courbe ; si $f \leqslant 0$, c'est l'opposé de l'aire.

Exercice 5 *Calculer des intégrales*

a) $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^2 (3x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x$ b) $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ c) $\mathrm{K} = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

d) $\mathrm{L} = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$ e) $\mathrm{M} = \displaystyle\int_{-1}^1 x^3\,\mathrm{d}x$ f) $\mathrm{N} = \displaystyle\int_0^4 (x^2 - 4x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 6 *Aires* Soient $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x^2$.

a) Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de f et l'axe des abscisses sur $[-2\ ;\ 2]$.

b) Résoudre $f(x) \geqslant g(x)$. En déduire l'aire du domaine compris entre les deux courbes (valeur exacte puis arrondie au centième).

④ Propriétés et applications

Exercice 7 *Utiliser les propriétés* On sait que $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$ et $\displaystyle\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$.

a) Calculer $\displaystyle\int_1^4 \big(2f(x) - g(x)\big)\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_4^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^4 \big(f(x) + 3\big)\mathrm{d}x$.

b) Donner la valeur moyenne de f sur $[1\ ;\ 4]$.

c) Sans calculer, encadrer $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ en encadrant d'abord e^{x^2} sur $[0\ ;\ 1]$.

Exercice 8 *Une quantité accumulée* Le nombre de naissances par an dans une population est modélisé par $r(t) = 100\,\mathrm{e}^{0{,}05t}$, où t est le temps en années depuis 2025. Le nombre total de naissances entre les instants 0 et 10 est $\displaystyle\int_0^{10} r(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Donner une primitive de r.

b) Calculer le nombre total de naissances sur la période 2025-2035 (arrondir à l'unité).

c) En déduire le nombre moyen de naissances par an sur cette période. Comparer avec $r(0)$ et $r(10)$.

5 Pour s'auto-évaluer

Rappel : cinq questions à se poser

- Ai-je *remonté* (exposant +1, division par le nouvel exposant) et non dérivé ?
- Ai-je dérivé ma primitive pour vérifier qu'elle redonne exactement la fonction ?
- Pour une forme $u'\,g(u)$, ai-je ajusté le coefficient qui compense u' ?
- Dans $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, ai-je bien mis la borne du haut en premier ?
- Si la fonction est négative, ai-je distingué l'intégrale (négative) de l'aire (positive) ?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

a) $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^6}{6}$.

b) $\mathrm{G}(x) = 3x$.

c) $\mathrm{H}(x) = -\dfrac{1}{x}$.

d) $\mathrm{K}(x) = \mathrm{e}^x$.

e) $\mathrm{M}(x) = \ln x$.

f) $\mathrm{N}(x) = x^4 - x^2 + 7x$.

Chaque réponse se vérifie en dérivant : par exemple $\left(x^4 - x^2 + 7x\right)' = 4x^3 - 2x + 7$. ✓

Corrigé de l'exercice 2.

a) $2x$ est la *dérivée* de x^2. Une primitive est $\dfrac{x^3}{3}$, dont la dérivée est x^2.

b) La dérivée de e^{5x} est $5\mathrm{e}^{5x}$, pas e^{5x} : il manque le coefficient compensateur. Une primitive est $\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}$.

c) $-\dfrac{1}{x^2}$ est la *dérivée* de $\dfrac{1}{x}$. Une primitive de $\dfrac{1}{x}$ est $\ln x$.

d) La dérivée de $\dfrac{(2x+3)^5}{5}$ est $\dfrac{5 \times 2(2x+3)^4}{5} = 2(2x+3)^4$: il manque le facteur $\dfrac{1}{2}$ qui compense $u' = 2$. Une primitive est $\dfrac{(2x+3)^5}{10}$.

Corrigé de l'exercice 3.

a) $u = x^2 + 1 > 0$, $u' = 2x$: $f = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u}$, donc $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$.

b) $u = x^3$, $u' = 3x^2$: $g = u'\mathrm{e}^u$, donc $\mathrm{G}(x) = \mathrm{e}^{x^3}$.

c) $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$: $h = u'u^3$, donc $\mathrm{H}(x) = \dfrac{\left(x^2+1\right)^4}{4}$.

d) $u = 3x - 2 > 0$, $u' = 3$: $k = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{u'}{u}$, donc $\mathrm{K}(x) = \dfrac{1}{3}\ln(3x-2)$.

e) $u = -x$, $u' = -1$: $m = -u'\mathrm{e}^u$, donc $\mathrm{M}(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. Vérification : $(-\mathrm{e}^{-x})' = -(-1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$. ✓

f) $u = x^2 + 2x + 5$ (discriminant $4 - 20 < 0$, donc $u > 0$), $u' = 2x + 2$: $n = \dfrac{u'}{u^2}$, donc $\mathrm{N}(x) = -\dfrac{1}{x^2+2x+5}$.

Corrigé de l'exercice 4.

a) Les primitives sont $F(x) = x^3 - x + C$. $F(1) = 1 - 1 + C = C = 0$, donc $F(x) = x^3 - x$.

b) $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$ et $G(0) = \frac{1}{2} + C = 1$, donc $C = \frac{1}{2}$: $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}$.

c) $H(x) = \ln x + C$ et $H(e) = 1 + C = 3$, donc $C = 2$: $H(x) = \ln x + 2$.

Corrigé de l'exercice 5.

a) $I = \left[x^3 - x^2\right]_1^2 = (8 - 4) - (1 - 1) = 4$.

b) $J = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2} \approx 3{,}19$.

c) $K = \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = 2 \times 2 - 2 \times 1 = 2$.

d) $L = \left[\ln(x - 1)\right]_2^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}69$.

e) $M = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$: la courbe de x^3 est symétrique par rapport à l'origine, les deux aires (sous l'axe puis au-dessus) se compensent.

f) $N = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^4 = \frac{64}{3} - 32 = -\frac{32}{3}$: sur $[0\ ;\ 4]$, $x^2 - 4x = x(x - 4) \leqslant 0$, la courbe est sous l'axe, l'aire du domaine vaut $\frac{32}{3}$.

Corrigé de l'exercice 6.

a) Sur $[-2\ ;\ 2]$, $f(x) = 4 - x^2 \geqslant 0$. $\mathcal{A}_1 = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10{,}67$ unités d'aire.

b) $4 - x^2 \geqslant x^2 \iff x^2 \leqslant 2 \iff -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$. Sur cet intervalle, la parabole f est au-dessus de g :

$$\mathcal{A}_2 = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2)\,dx = \left[4x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 2\left(4\sqrt{2} - \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{3}\right) = 2 \times \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \approx 7{,}54.$$

(On a utilisé $\left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}$ et la symétrie des bornes.)

Corrigé de l'exercice 7.

a) Linéarité : $2 \times 6 - (-2) = 14$. Bornes échangées : -6. Linéarité avec la constante : $6 + 3 \times (4 - 1) = 6 + 9 = 15$.

b) $\mu = \frac{1}{4 - 1} \times 6 = 2$.

c) Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, donc $1 \leqslant \mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}$. Par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}\,\mathrm{d}x$, soit $1 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e} \approx 2{,}72$. (Cette intégrale n'a pas de primitive exprimable avec les fonctions usuelles : l'encadrement est la seule voie.)

Corrigé de l'exercice 8.

a) $u = 0{,}05t$, $u' = 0{,}05$: $r = \dfrac{100}{0{,}05} \times 0{,}05\,\mathrm{e}^{0{,}05t}$, donc $\mathrm{R}(t) = 2000\,\mathrm{e}^{0{,}05t}$. Vérification : $\mathrm{R}'(t) = 2000 \times 0{,}05\,\mathrm{e}^{0{,}05t} = 100\,\mathrm{e}^{0{,}05t}$. ✓

b) $\displaystyle\int_0^{10} r(t)\,\mathrm{d}t = \Big[2000\,\mathrm{e}^{0{,}05t}\Big]_0^{10} = 2000\left(\mathrm{e}^{0{,}5} - 1\right) \approx 1297$ naissances.

c) Moyenne : $\dfrac{1297}{10} \approx 130$ naissances par an. C'est compris entre $r(0) = 100$ et $r(10) = 100\,\mathrm{e}^{0{,}5} \approx 165$: la valeur moyenne d'une fonction croissante est comprise entre ses valeurs aux bornes.