MATHÉMATIQUES

Maîtriser les fonctions

Une fiche d'exercices pour comprendre la fonction comme objet, articuler les registres et lire les graphiques

Fiche de cours : Fonctions.

① Pourquoi cette fiche ?

La notion de fonction est l'un des objets les plus puissants des mathématiques, mais aussi l'un des plus délicats à conceptualiser. Une fonction n'est pas seulement une formule de calcul : c'est un objet mathématique à part entière, qu'on peut manipuler, comparer, transformer. Elle peut être donnée par un **tableau de valeurs**, une **formule algébrique**, une **représentation graphique** ou une **description verbale** d'une situation. Ces quatre points de vue désignent le même objet et doivent rester articulés.

Cette fiche aborde les fonctions en partant des confusions les plus fréquentes : on traitera la variable muette (la lettre dans $f(x)$ n'est qu'un emplacement), la distinction entre image et antécédent, l'opposition entre variation (la fonction augmente) et valeur (la fonction est positive), et la circulation entre les trois registres de représentation.

② Ce qu'est une fonction

Rappel : une fonction associe à chaque entrée une seule sortie

Une fonction f d'un ensemble de **départ** vers un ensemble d'**arrivée** associe à chaque élément x du départ **un seul** élément, noté $f(x)$, de l'arrivée. On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par f, et que x est un **antécédent** de $f(x)$.
Trois points clés.

- Chaque entrée x a une et une seule image $f(x)$.
- Une même image peut avoir plusieurs antécédents (par exemple, $f(x) = x^2$ a deux antécédents pour 9 : 3 et -3).
- L'image dépend uniquement de la valeur de x, jamais de la lettre utilisée pour la noter.

Exercice 1 *Fonction ou pas fonction ?* Pour chacune des correspondances suivantes, dire si elle définit une fonction. Si non, expliquer pourquoi.

a) À chaque élève d'une classe, on associe sa date de naissance.

b) À chaque date de naissance, on associe les élèves nés ce jour-là.

c) À chaque nombre réel x, on associe $x^2 + 1$.

d) À chaque nombre réel positif, on associe les deux nombres dont il est le carré.

③ Les trois registres de représentation

Rappel : numérique, algébrique, graphique

Une même fonction peut être représentée de trois façons complémentaires.

- **Registre numérique :** un tableau de valeurs associant à des entrées x leurs images $f(x)$.
- **Registre algébrique :** une formule comme $f(x) = 2x + 3$, qui permet de calculer l'image de n'importe quel x.
- **Registre graphique :** une courbe dans un repère, où chaque point est de coordonnées $(x \ ; \ f(x))$.

Maîtriser une fonction, c'est savoir circuler entre ces registres : passer du tableau à la formule, de la formule au graphique, du graphique à la lecture numérique. Chaque registre éclaire un aspect particulier que les autres laissent dans l'ombre.

Exercice 2 *Trois registres pour une même fonction* On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x + 1$.

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

b) Tracer la représentation graphique de f dans un repère, en plaçant les points du tableau.

c) À l'aide du graphique, lire l'image de 1,5 par f.

d) Vérifier ce résultat par le calcul algébrique.

④ Image et antécédent : deux sens de lecture

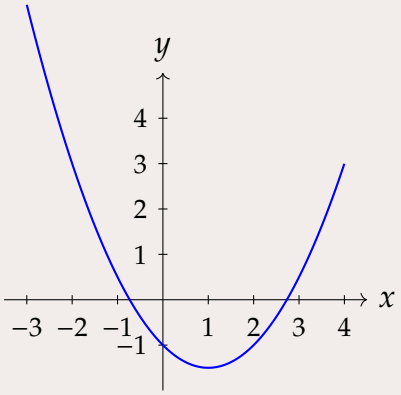
Rappel : lire dans le bon sens

Une question de vocabulaire à ne jamais confondre.

- Calculer l'**image** d'un nombre a, c'est trouver $f(a)$. Sur le graphique, on part de a sur l'axe des abscisses, on monte jusqu'à la courbe, puis on lit l'ordonnée correspondante.
- Trouver les **antécédents** d'un nombre b, c'est trouver tous les x tels que $f(x) = b$. Sur le graphique, on part de b sur l'axe des ordonnées, on se déplace horizontalement jusqu'à rencontrer la courbe, puis on lit la (ou les) abscisse(s) correspondante(s).

L'image est unique ; les antécédents peuvent être multiples (ou inexistants). Lire un antécédent demande un sens de lecture inversé sur le graphique, ce qui est plus difficile que la lecture d'image.

Exercice 3 *Lectures graphiques* On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-3\ ;\ 4]$.



a) Lire $f(0)$, $f(2)$ et $f(-2)$.

b) Trouver les antécédents de -1 par f.

c) Trouver les antécédents de 0 par f.

d) Combien d'antécédents le nombre 4 admet-il par f ?

⑤ Variation et valeur : deux notions distinctes

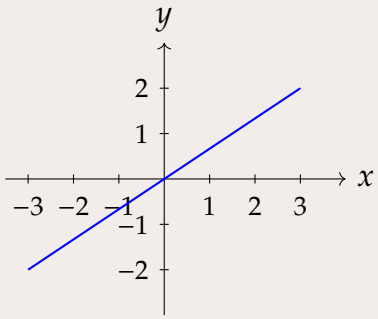
Rappel : quand la fonction « monte » et quand elle est « positive »

Deux confusions à démêler.

- Dire qu'une fonction est **croissante** sur un intervalle, c'est dire que ses valeurs **augmentent** quand x augmente. Sur le graphique, la courbe monte de gauche à droite.
- Dire qu'une fonction est **positive** sur un intervalle, c'est dire que ses valeurs sont $\geqslant 0$. Sur le graphique, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses.

Ces deux notions sont indépendantes : une fonction peut être croissante et négative, croissante et positive, décroissante et positive, etc.

Exercice 4 *Démêler variation et signe* On considère la fonction f représentée ci-dessous, définie sur $[-3\ ;\ 3]$.



a) La fonction est-elle croissante ou décroissante sur $[-3\ ;\ 3]$?

b) Donner l'intervalle sur lequel la fonction est négative.

c) Donner l'intervalle sur lequel la fonction est positive.

d) Compléter : « Sur l'intervalle $[-3\ ;\ 0]$, la fonction est ... et ... ». Choisir parmi croissante, décroissante, positive, négative.

⑥ La variable muette

Rappel : la lettre n'est qu'un emplacement

Lorsqu'on écrit $f(x) = 2x + 3$, la lettre x ne désigne pas un nombre particulier : elle joue le rôle d'**emplacement réservé** (en anglais « placeholder »). Si l'on remplace partout x par t, ou par n, ou par $\heartsuit$, on définit exactement la même fonction.

$$f(x) = 2x + 3 \quad ; \quad f(t) = 2t + 3 \quad ; \quad f(\heartsuit) = 2\heartsuit + 3.$$

Ce sont trois notations pour la même fonction, parce qu'elles définissent la même règle de calcul.
Le choix de la lettre est purement conventionnel. On utilise souvent x par habitude, t quand la variable représente un temps, n quand elle représente un entier. Mais la fonction reste la même.

Exercice 5 *Reconnaître une même fonction* Parmi les définitions suivantes, regrouper celles qui définissent la même fonction.

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $g(t) = 3t - 1$

c) $h(n) = 3n + 1$

d) $k(\theta) = 3\theta - 1$

e) $\ell(x) = 1 - 3x$

Exercice 6 *Calculer dans une fonction* Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4$.

a) Calculer $f(3)$, $f(-2)$, $f(0)$.

b) Calculer $f(t)$ lorsque $t = 5$.

c) Combien vaut $f(a)$ pour $a = -1$?

d) En quoi le choix de la lettre (x, t, a) modifie-t-il la fonction ?

⑦ Co-variation : deux grandeurs qui varient ensemble

Rappel : penser la fonction comme un lien dynamique

Avant d'être une formule, une fonction est souvent un **lien entre deux grandeurs** qui varient ensemble. Quand l'une augmente, l'autre augmente, diminue, ou reste constante. Cette manière de penser, dite de **co-variation**, prépare la compréhension de la dépendance fonctionnelle.
Quelques exemples : la distance parcourue dépend du temps écoulé ; le prix de l'essence dépend du nombre de litres achetés ; la hauteur de l'eau dans une baignoire dépend de la durée du remplissage.

Exercice 7 *Identifier la grandeur d'entrée* Pour chaque situation, identifier les deux grandeurs en jeu, désigner celle qui dépend de l'autre, et écrire si possible la formule reliant les deux.

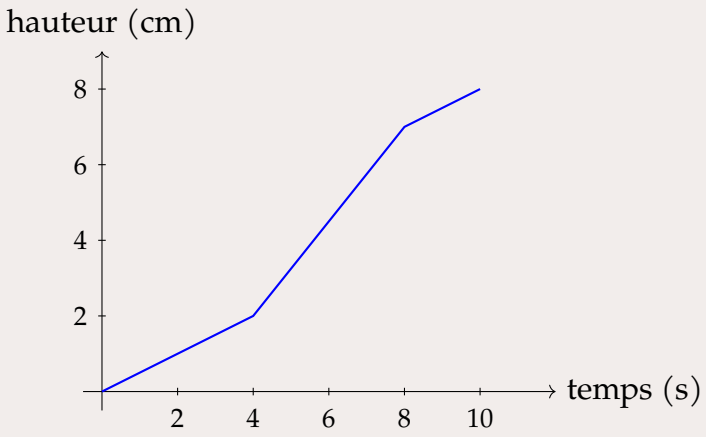
a) Un taxi facture 3 € de prise en charge et 2 € par kilomètre.

b) Un cycliste roule à vitesse constante de 25 km/h.

c) Le périmètre d'un carré dépend de la longueur de son côté.

d) L'aire d'un disque dépend de son rayon.

Exercice 8 *Lecture d'un graphique de co-variation* Le graphique ci-dessous représente la hauteur de l'eau (en cm) dans un récipient rempli régulièrement, en fonction du temps (en secondes).



a) Au bout de combien de secondes la hauteur atteint-elle 4 cm ?

b) Quelle est la hauteur de l'eau au bout de 6 secondes ?

c) Décrire la variation de la hauteur sur les trois phases visibles. Comment expliquer la forme du graphique en termes physiques (par exemple, le récipient n'est-il pas cylindrique) ?

⑧ Pour s'auto-évaluer

Rappel : cinq questions à se poser

Avant et pendant l'analyse d'une fonction, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Cette correspondance est-elle bien une fonction (chaque entrée a-t-elle une seule image) ?
- Suis-je en train de calculer une image (entrée donnée, sortie cherchée) ou de chercher un antécédent (sortie donnée, entrée cherchée) ?
- La lettre que j'utilise pour la variable change-t-elle vraiment la fonction, ou n'est-elle qu'un nom ?
- Quand j'analyse le graphique, est-ce que je parle de variation (sens de la pente) ou de signe (position par rapport à l'axe des abscisses) ?
- Mes informations issues du graphique sont-elles cohérentes avec celles que je tirerais du tableau de valeurs ou de la formule ?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

a) C'est bien une fonction : chaque élève a une seule date de naissance.

b) Ce n'est pas une fonction : à une même date peuvent correspondre plusieurs élèves (ou aucun).

c) C'est une fonction : chaque réel a un seul carré, donc un seul $x^2 + 1$.

d) Ce n'est pas une fonction : à 4 correspondraient à la fois 2 et -2, donc deux sorties pour une même entrée.

Corrigé de l'exercice 2.

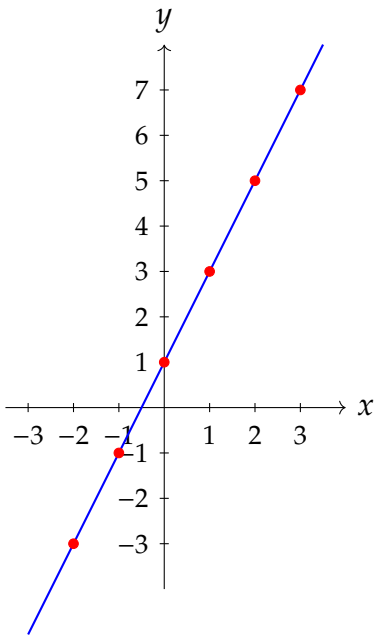
a)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5	7

b) Les points sont alignés : la représentation est une droite.

c) Sur le graphique, on lit $f(1{,}5) = 4$.

d) Par le calcul : $f(1{,}5) = 2 \times 1{,}5 + 1 = 4$. ✓



Corrigé de l'exercice 3. La fonction représentée est $f(x) = 0{,}5x^2 - x - 1$.

a) $f(0) = -1$; $f(2) = -1$; $f(-2) = 3$ (lectures sur le graphique, confirmées par le calcul).

b) Pour $f(x) = -1$, on lit deux antécédents : $x = 0$ et $x = 2$.

c) Pour $f(x) = 0$, on lit deux antécédents (les zéros de la fonction) : environ $x = -0{,}73$ et $x = 2{,}73$.

d) Pour $f(x) = 4$, on lit un seul antécédent, environ $x \approx -2{,}3$; à l'autre extrémité de l'intervalle d'étude, $f(4) = 3 < 4$: la courbe n'atteint pas 4.

Corrigé de l'exercice 4. La fonction représentée est $f(x) = \dfrac{2}{3}x$.

a) Croissante sur $[-3\ ;\ 3]$ (la courbe monte de gauche à droite).

b) Négative sur $[-3\ ;\ 0]$ (la courbe est sous l'axe des abscisses).

c) Positive sur $[0\ ;\ 3]$ (la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses).

d) Sur $[-3\ ;\ 0]$, la fonction est **croissante** et **négative**. C'est la situation typique qui montre que les deux notions sont indépendantes.

Corrigé de l'exercice 5. Les fonctions f, g et k sont identiques (même règle de calcul, seul le nom de la variable diffère). La fonction h est différente (le terme constant est $+1$ au lieu de -1). La fonction ℓ est encore différente (les coefficients sont opposés : $\ell(x) = -3x + 1$, alors que $f(x) = 3x - 1$).

Corrigé de l'exercice 6.

a) $f(3) = 9 - 4 = 5$; $f(-2) = 4 - 4 = 0$; $f(0) = -4$.

b) $f(5) = 25 - 4 = 21$.

c) $f(-1) = 1 - 4 = -3$.

d) Le choix de la lettre ne modifie en rien la fonction : c'est seulement le nom donné au nombre que l'on remplace dans la formule.

Corrigé de l'exercice 7.

a) Grandeurs : distance parcourue d (en km) et prix payé p (en euros). Le prix dépend de la distance : $p(d) = 2d + 3$.

b) Grandeurs : temps écoulé t (en heures) et distance parcourue d (en km). $d(t) = 25t$.

c) Grandeurs : longueur du côté c et périmètre P. $\mathrm{P}(c) = 4c$.

d) Grandeurs : rayon r et aire A. $\mathrm{A}(r) = \pi r^2$.

Corrigé de l'exercice 8.

a) La hauteur 4 cm est atteinte à environ $t = 5{,}6$ s (lecture graphique sur la deuxième phase).

b) À $t = 6$ s, la hauteur lue est environ 4,5 cm (sur la deuxième phase).

c) Sur $[0\ ;\ 4]$, la hauteur monte lentement (pente faible). Sur $[4\ ;\ 8]$, elle monte plus vite (pente plus forte). Sur $[8\ ;\ 10]$, elle monte de nouveau lentement. Une explication possible : le récipient se resserre au milieu (quand la section est plus petite, la hauteur monte plus vite à débit constant) ; il est plus large en bas et en haut.