MATHÉMATIQUES

Maîtriser les fonctions trigonométriques

Une fiche d'exercices pour lire le cercle, dériver, résoudre des équations et modéliser des phénomènes périodiques

Fiche de cours : Fonctions trigonométriques.

① Pourquoi cette fiche ?

La trigonométrie de terminale déroute parce qu'elle mélange trois registres : la géométrie du cercle, l'algèbre des formules de symétrie et l'analyse des fonctions. Les erreurs sont toujours les mêmes : une solution oubliée sur deux, un signe inversé dans une symétrie, un coefficient perdu en dérivant, une calculatrice restée en degrés.

Cette fiche isole chaque geste : convertir et placer sur le cercle, calculer avec les valeurs remarquables et la relation fondamentale, démasquer les erreurs fréquentes, résoudre des équations et inéquations, dériver, étudier une fonction pour démontrer des inégalités, puis modéliser deux phénomènes périodiques.

② Lire le cercle

Rappel : le cercle avant la formule

Avant tout calcul, placer le point sur le cercle : le quart du cercle donne les signes, la symétrie donne la valeur. Un multiple de 2π ne change rien : on le retire d'abord.

Exercice 1 *Conversions, mesures principales, points confondus*

a) Convertir en radians $72°$, $210°$ et $300°$; convertir en degrés $\dfrac{7\pi}{5}$ et $\dfrac{11\pi}{6}$.

b) Déterminer la mesure principale de $\dfrac{29\pi}{6}$, $-\dfrac{13\pi}{3}$ et $\dfrac{31\pi}{4}$.

c) Les réels suivants correspondent-ils au même point du cercle ? $\dfrac{7\pi}{3}$ et $-\dfrac{5\pi}{3}$; $\dfrac{5\pi}{6}$ et $-\dfrac{7\pi}{6}$; $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.

Exercice 2 *Valeurs remarquables et relation fondamentale*

a) Calculer $\cos\dfrac{11\pi}{6}$, $\sin\dfrac{7\pi}{4}$, $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\dfrac{13\pi}{6}$.

b) On donne $\cos x = -\dfrac{2}{3}$ avec $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$. Calculer $\sin x$.

c) On donne $\sin x = -\dfrac{1}{4}$ avec $x \in \left]\pi\ ;\ \dfrac{3\pi}{2}\right[$. Calculer $\cos x$.

d) Démontrer que pour tout réel x, $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$.

③ Démasquer les erreurs

Exercice 3 *Cinq raisonnements à corriger* Chaque raisonnement contient une erreur. La repérer et la corriger.

a) « $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $x = \dfrac{\pi}{6}$. »

b) « Pour tout x, $\sin(\pi + x) = \sin x$. »

c) « La dérivée de $x \mapsto \cos(5x)$ est $x \mapsto -\sin(5x)$. »

d) « L'équation $\sin x = 2$ a pour solutions $x = \arcsin 2 + 2k\pi$. »

e) « Ma calculatrice donne $\cos\dfrac{\pi}{3} \approx 0{,}9998$. »

④ Équations et inéquations

Rappel : deux familles, puis l'intervalle

On écrit d'abord toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ (deux familles en général), puis on choisit les valeurs de k qui tombent dans l'intervalle demandé. Le cercle sert à vérifier qu'on n'en a ni trop ni trop peu.

Exercice 4 *Cinq résolutions*

a) Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$: $2\sin x - 1 = 0$.

b) Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$: $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$: $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$.

d) Résoudre dans $[0\ ;\ \pi]$: $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$.

e) Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'inéquation $\sin x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

⑤ Dériver

Exercice 5 *Dérivées et tangente*

a) Dériver $f(x) = \cos x + x\sin x$ et simplifier.

b) Dériver $g(x) = \sin^2 x$.

c) Dériver $h(x) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

d) Dériver $k(x) = \mathrm{e}^x \cos x$ et factoriser.

e) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto 2\sin x$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{3}$.

⑥ Étudier pour démontrer

Exercice 6 *Deux inégalités classiques*

a) Soit $f(x) = x - \sin x$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f, puis montrer que $\sin x \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$.

b) Soit $g(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. Calculer $g'(x)$, utiliser la question précédente pour en donner le signe, et montrer que $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x \geqslant 0$.

c) En déduire un encadrement de $\cos 0{,}1$ et comparer à la valeur donnée par la calculatrice.

⑦ Problèmes en contexte

Exercice 7 *Une grande roue* Une grande roue tourne à vitesse constante. La hauteur (en mètres) d'une nacelle au-dessus du sol, t secondes après le départ, est $h(t) = 12 - 10\cos\left(\frac{\pi t}{15}\right)$.

a) Calculer $h(0)$ et $h(15)$. Quelle est la durée d'un tour ? En déduire le diamètre de la roue et la hauteur de son axe.

b) Pendant combien de temps, au cours d'un tour, la nacelle est-elle à plus de 17 m du sol ?

c) Calculer $h'(t)$. À quel instant du premier tour la nacelle monte-t-elle le plus vite, et à quelle vitesse ?

Exercice 8 *Le courant alternatif* La tension (en volts) du réseau domestique est modélisée, pour t en secondes, par

$$u(t) = 230\sqrt{2}\,\sin(100\pi t).$$

a) Déterminer la période de u et en déduire la fréquence du courant (nombre de périodes par seconde).

b) Quelle est la tension maximale ? À quels instants de la première période est-elle atteinte ?

c) À quels instants la tension s'annule-t-elle ?

d) Déterminer le premier instant $t > 0$ où $u(t) = 230$.

⑧ Pour s'auto-évaluer

Rappel : cinq questions à se poser

- Ma calculatrice est-elle en radians ?
- Ai-je placé le point sur le cercle avant de donner un signe ou une valeur ?
- Pour une équation, ai-je écrit les **deux** familles de solutions puis trié selon l'intervalle ?
- En dérivant $\cos(ax+b)$ ou $\sin(ax+b)$, ai-je multiplié par a et mis le bon signe ?
- Pour une fonction périodique, ai-je réduit l'intervalle d'étude avant de dériver ?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

a) $72° = \dfrac{72\pi}{180} = \dfrac{2\pi}{5}$; $210° = \dfrac{7\pi}{6}$; $300° = \dfrac{5\pi}{3}$. $\dfrac{7\pi}{5} = \dfrac{7 \times 180}{5} = 252°$; $\dfrac{11\pi}{6} = 330°$.

b) $\dfrac{29\pi}{6} - 4\pi = \dfrac{5\pi}{6}$; $-\dfrac{13\pi}{3} + 4\pi = -\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{31\pi}{4} - 8\pi = -\dfrac{\pi}{4}$.

c) Deux réels donnent le même point si leur différence est un multiple de 2π. $\dfrac{7\pi}{3} - \left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = 4\pi$: oui. $\dfrac{5\pi}{6} - \left(-\dfrac{7\pi}{6}\right) = 2\pi$: oui. $\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$: non.

Corrigé de l'exercice 2.

a) $\dfrac{11\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi$: $\cos\dfrac{11\pi}{6} = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\dfrac{7\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi$: $\sin\dfrac{7\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\dfrac{13\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi$: $\sin\dfrac{13\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

b) $\sin^2 x = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$; dans le deuxième quart le sinus est positif : $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

c) $\cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$; dans le troisième quart le cosinus est négatif : $\cos x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

d) En développant : $\cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2$.

Corrigé de l'exercice 3.

a) Il manque la seconde famille et la périodicité : $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Le point associé à $\pi + x$ est le symétrique par rapport à O : $\sin(\pi + x) = -\sin x$. C'est $\sin(\pi - x)$ qui vaut $\sin x$.

c) La dérivée de la fonction intérieure $5x$ donne un facteur 5 : $-5\sin(5x)$.

d) Un sinus est compris entre -1 et 1 : l'équation $\sin x = 2$ n'a aucune solution.

e) La calculatrice est en degrés (elle a calculé $\cos(1{,}047°)$). En radians, $\cos\dfrac{\pi}{3} = 0{,}5$ exactement.

Corrigé de l'exercice 4.

a) $\sin x = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$: $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

b) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{3\pi}{4}$: $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = -\dfrac{3\pi}{4}$.

c) $\sin u = 0 \iff u = k\pi$, donc $x - \dfrac{\pi}{3} = k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$. Dans $]-\pi\ ;\ \pi]$: $x = \dfrac{\pi}{3}$ $(k = 0)$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3}$ $(k = -1)$.

d) $\cos(2x) = \cos\dfrac{\pi}{3}$ donne $2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, soit $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$. Dans $[0\ ;\ \pi]$: $x = \dfrac{\pi}{6}$ et $x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{5\pi}{6}$.

e) $\sin x > \dfrac{1}{2}$ exactement sur l'arc $\left]\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{5\pi}{6}\right[$ (au-dessus de la droite $y = \dfrac{1}{2}$). Les solutions de $\sin x \leqslant \dfrac{1}{2}$ forment donc $\left]-\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6}\ ;\ \pi\right]$.

Corrigé de l'exercice 5.

a) $f'(x) = -\sin x + (\sin x + x\cos x) = x\cos x$.

b) $g = u^2$ avec $u = \sin$: $g'(x) = 2\sin x\cos x$.

c) $h'(x) = -2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

d) $k'(x) = \mathrm{e}^x\cos x - \mathrm{e}^x\sin x = \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)$.

e) $2\sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ et $2\cos\dfrac{\pi}{3} = 1$: $y = 1\times\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = x - \dfrac{\pi}{3} + \sqrt{3}$.

Corrigé de l'exercice 6.

a) $f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ car $\cos x \leqslant 1$: f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $\sin x \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$.

b) $g'(x) = -\sin x + x = f(x) \geqslant 0$ d'après a) : g est croissante et $g(0) = 0$, donc $g(x) \geqslant 0$, soit $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$ pour $x \geqslant 0$.

c) $1 - \dfrac{0{,}01}{2} = 0{,}995 \leqslant \cos 0{,}1 \leqslant 1$. La calculatrice (en radians) donne $\cos 0{,}1 \approx 0{,}99500$: la minoration est excellente pour les petits angles.

Corrigé de l'exercice 7.

a) $h(0) = 12 - 10 = 2$ m (point bas) et $h(15) = 12 + 10 = 22$ m (point haut). Période : $\dfrac{\pi\mathrm{T}}{15} = 2\pi$ donne T = 30 s. Diamètre $22 - 2 = 20$ m, axe à 12 m.

b) $h(t) > 17 \iff \cos\dfrac{\pi t}{15} < -\dfrac{1}{2} \iff \dfrac{2\pi}{3} < \dfrac{\pi t}{15} < \dfrac{4\pi}{3}$ (sur un tour) $\iff 10 < t < 20$: pendant 10 secondes par tour.

c) $h'(t) = 10\times\dfrac{\pi}{15}\sin\dfrac{\pi t}{15} = \dfrac{2\pi}{3}\sin\dfrac{\pi t}{15}$. Maximum quand $\sin\dfrac{\pi t}{15} = 1$, soit $t = 7{,}5$ s (à mi-hauteur en montée) : vitesse $\dfrac{2\pi}{3} \approx 2{,}1$ m/s.

Corrigé de l'exercice 8.

a) $100\pi T = 2\pi$ donne T = 0,02 s, soit une fréquence de $\frac{1}{0{,}02} = 50$ périodes par seconde (50 Hz).

b) Maximum $230\sqrt{2} \approx 325$ V, atteint quand $\sin(100\pi t) = 1$, soit $100\pi t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $t = 0{,}005 + 0{,}02k$: une fois par période, à $t = 0{,}005$ s sur $[0\ ;\ 0{,}02[$.

c) $\sin(100\pi t) = 0 \iff 100\pi t = k\pi \iff t = 0{,}01k$: toutes les 10 ms.

d) $230\sqrt{2}\sin(100\pi t) = 230 \iff \sin(100\pi t) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; la première solution positive est $100\pi t = \frac{\pi}{4}$, soit $t = \frac{1}{400} = 0{,}0025$ s.