MATHÉMATIQUES

Maîtriser les équations différentielles

Une fiche d'exercices pour vérifier, résoudre et modéliser avec les équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$

Fiche de cours : Équations différentielles.

① Pourquoi cette fiche ?

Les équations différentielles de terminale se résolvent avec deux formules seulement, et c'est précisément ce qui rend les erreurs si fréquentes : on applique la formule sans avoir mis l'équation sous la bonne forme, on oublie la constante, on prend b pour la solution constante, ou l'on calcule C comme si la constante d'équilibre n'existait pas.

Cette fiche isole chaque geste : vérifier qu'une fonction est solution, résoudre $y' = ay$ avec une condition initiale, démasquer les erreurs classiques, résoudre $y' = ay + b$ dans toutes ses écritures, exploiter une solution particulière, étudier une solution, puis modéliser deux situations concrètes, dont l'une fait intervenir le logarithme pour remonter le temps.

② Vérifier

Rappel : deux calculs séparés

On calcule d'un côté $f'(x)$, de l'autre le membre de droite avec f à la place de y, et l'on compare. Ne jamais partir de l'égalité à démontrer.

Exercice 1 *Solution ou pas ?*

a) $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{-2x}$ est-elle solution de $y' = -2y$?

b) $g(x) = 2\,\mathrm{e}^{3x} - 1$ est-elle solution de $y' = 3y + 3$?

c) $h(x) = \mathrm{e}^{x} + x + 1$ est-elle solution de $y' = y - x$?

d) $k(x) = (x + 1)\,\mathrm{e}^{x}$ est-elle solution de $y' = y + \mathrm{e}^{x}$? de $y' = y + x\,\mathrm{e}^{x}$?

③ Résoudre $y' = ay$

Rappel : isoler y' d'abord

Dans $2y' + y = 0$ ou $5y' = y$, le coefficient a n'apparaît qu'une fois l'équation écrite $y' = a\,y$. La condition initiale se traite en dernier, en remplaçant x par la valeur donnée dans $\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}$.

Exercice 2 *Quatre équations, quatre conditions* Résoudre chaque équation sur $\mathbb{R}$, puis déterminer la solution vérifiant la condition donnée.

a) $y' = -4y$ et $y(0) = 3$.

b) $y' + 2y = 0$ et $y(1) = 2$.

c) $5y' = y$ et $y(0) = -1$.

d) $3y' - 2y = 0$ et $y(3) = 5$.

④ Démasquer les erreurs

Exercice 3 *Cinq raisonnements à corriger* Chaque raisonnement contient une erreur. La repérer et la corriger.

a) « $y' = 4y$ a pour solution e^{4x} ; celle qui vérifie $y(0) = 3$ est donc $\mathrm{e}^{4x} + 2$. »

b) « Les solutions de $y' = -2y + 8$ sont les fonctions $\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-2x} + 8$. »

c) « $y' = 3y - 6$ avec $y(0) = 4$: $y = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{3x} + 2$, donc $\mathrm{C} = 4$. »

d) « $2y' = 3y$, donc $a = 3$ et les solutions sont $\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{3x}$. »

e) « Toutes les solutions de $y' = 2y + 6$ tendent vers -3 en $+\infty$. »

⑤ Résoudre $y' = ay + b$

Exercice 4 *Quatre écritures différentes* Résoudre chaque équation avec sa condition initiale.

a) $y' = 2y + 4$ et $y(0) = 1$.

b) $y' + 2y = 8$ et $y(0) = 0$.

c) $5y' = y - 10$ et $y(0) = 12$.

d) $y' = -y + 3$ et $y(\ln 2) = 1$.

⑥ Avec une solution particulière

Rappel : le principe

Si φ est une solution particulière de $y' = ay + f(x)$, alors $y - \varphi$ est solution de $y' = ay$: les solutions sont les $C\,e^{ax} + \varphi(x)$.

Exercice 5 *Deux équations avec second membre*

a) Vérifier que $\varphi(x) = e^x$ est solution de $(E_1) : y' = -y + 2\,e^x$. En déduire toutes les solutions de (E_1), puis celle qui vérifie $y(0) = 3$.

b) Vérifier que $\psi(x) = -x - 1$ est solution de $(E_2) : y' = y + x$. En déduire toutes les solutions de (E_2), puis celle qui vérifie $y(0) = 0$.

⑦ Étudier une solution

Exercice 6 *Deux conditions initiales, deux destins* On considère l'équation $y' = 0{,}5y - 2$.

a) Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 3$ et la solution g vérifiant $g(0) = 5$.

b) Étudier le sens de variation de f et de g, puis leurs limites en $+\infty$.

c) Résoudre $f(x) = 0$.

d) Que se passe-t-il pour la solution vérifiant $y(0) = 4$? Expliquer pourquoi l'équilibre 4 est dit instable.

⑧ Problèmes en contexte

Exercice 7 *Datation au carbone 14* Le nombre $N(t)$ de noyaux de carbone 14 dans un échantillon vérifie $N' = -\lambda N$, où $\lambda > 0$ est la constante de désintégration et t est en années. La demi-vie du carbone 14 est de 5730 ans : au bout de ce temps, la moitié des noyaux initiaux subsiste.

a) Exprimer $N(t)$ en fonction de $N_0 = N(0)$ et de λ.

b) Déterminer la valeur exacte de λ, puis une valeur approchée.

c) Un échantillon ne contient plus que 25 % de son carbone 14 initial. Quel est son âge ?

d) Un autre en contient encore 60 %. Quel est son âge, à l'année près ?

Exercice 8 *Vitesse d'un parachutiste* La vitesse $v(t)$ (en m/s) d'un parachutiste en chute, parachute ouvert, vérifie $v' = 10 - 0{,}5\,v$ (t en secondes) : la gravité l'accélère, la résistance de l'air, proportionnelle à la vitesse, le freine.

a) Résoudre l'équation avec $v(0) = 0$ (saut depuis un point fixe, parachute déjà ouvert).

b) Déterminer la vitesse limite et le temps nécessaire pour atteindre 19 m/s.

c) Le parachutiste ouvre en réalité son parachute alors qu'il tombe à 50 m/s. Résoudre l'équation avec $v(0) = 50$, décrire l'évolution de la vitesse et calculer le temps nécessaire pour descendre à 22 m/s.

d) Que retrouve-t-on dans les deux situations ?

9 Pour s'auto-évaluer

Rappel : cinq questions à se poser

- Ai-je mis l'équation sous la forme $y' = ay + b$ avant de lire a et b ?
- Ai-je écrit la solution constante $-\dfrac{b}{a}$, et non b ?
- Ma solution générale contient-elle bien une constante C qui **multiplie** l'exponentielle ?
- Pour calculer C, ai-je tenu compte de la constante $-\dfrac{b}{a}$ dans $y(x_0)$?
- Ai-je vérifié ma solution en la dérivant et en la remplaçant dans l'équation ?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

a) $f'(x) = -10\,\mathrm{e}^{-2x}$ et $-2f(x) = -10\,\mathrm{e}^{-2x}$: oui.

b) $g'(x) = 6\,\mathrm{e}^{3x}$ et $3g(x) + 3 = 6\,\mathrm{e}^{3x} - 3 + 3 = 6\,\mathrm{e}^{3x}$: oui.

c) $h'(x) = \mathrm{e}^{x} + 1$ et $h(x) - x = \mathrm{e}^{x} + 1$: oui.

d) $k'(x) = \mathrm{e}^{x} + (x+1)\,\mathrm{e}^{x} = k(x) + \mathrm{e}^{x}$: solution de la première. Pour la seconde, il faudrait $k'(x) = k(x) + x\,\mathrm{e}^{x}$, or $k'(x) - k(x) = \mathrm{e}^{x} \neq x\,\mathrm{e}^{x}$: non.

Corrigé de l'exercice 2.

a) $y = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-4x}$; $\mathrm{C} = 3$: $y = 3\,\mathrm{e}^{-4x}$.

b) $y' = -2y$, $y = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-2x}$; $y(1) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-2} = 2$, $\mathrm{C} = 2\,\mathrm{e}^{2}$: $y = 2\,\mathrm{e}^{2-2x}$.

c) $y' = \dfrac{1}{5}y$, $y = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{x/5}$; $\mathrm{C} = -1$: $y = -\mathrm{e}^{x/5}$.

d) $y' = \dfrac{2}{3}y$, $y = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{2x/3}$; $y(3) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{2} = 5$, $\mathrm{C} = 5\,\mathrm{e}^{-2}$: $y = 5\,\mathrm{e}^{2x/3-2}$.

Corrigé de l'exercice 3.

a) Les solutions sont $\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{4x}$; ajouter 2 ne donne pas une solution. Avec $y(0) = 3$: $\mathrm{C} = 3$ et $y = 3\,\mathrm{e}^{4x}$.

b) La solution constante est $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{8}{-2} = 4$, pas 8 : solutions $\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-2x} + 4$.

c) $y(0) = \mathrm{C} + 2 = 4$ donne $\mathrm{C} = 2$, pas 4 : $y = 2\,\mathrm{e}^{3x} + 2$.

d) Il faut isoler y' : $y' = \dfrac{3}{2}y$, donc $a = \dfrac{3}{2}$ et les solutions sont $\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{3x/2}$.

e) Avec $a = 2 > 0$, $\mathrm{e}^{2x} \to +\infty$: seule la solution constante -3 reste en -3 ; les autres tendent vers $+\infty$ (si $\mathrm{C} > 0$) ou $-\infty$ (si $\mathrm{C} < 0$). La convergence vers l'équilibre n'a lieu que pour $a < 0$.

Corrigé de l'exercice 4.

a) Constante $-\dfrac{4}{2} = -2$; $y = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{2x} - 2$; $\mathrm{C} - 2 = 1$, $\mathrm{C} = 3$: $y = 3\,\mathrm{e}^{2x} - 2$.

b) $y' = -2y + 8$, constante 4 ; $y = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-2x} + 4$; $\mathrm{C} + 4 = 0$: $y = 4 - 4\,\mathrm{e}^{-2x}$.

c) $y' = 0{,}2y - 2$, constante $\dfrac{2}{0{,}2} = 10$; $y = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{0{,}2x} + 10$; $\mathrm{C} + 10 = 12$: $y = 2\,\mathrm{e}^{0{,}2x} + 10$.

d) Constante 3 ; $y = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-x} + 3$; $y(\ln 2) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-\ln 2} + 3 = \dfrac{\mathrm{C}}{2} + 3 = 1$, $\mathrm{C} = -4$: $y = 3 - 4\,\mathrm{e}^{-x}$.

Corrigé de l'exercice 5.

a) $\varphi'(x) = \mathrm{e}^{x}$ et $-\varphi(x) + 2\,\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}$: solution. Solutions de (E_1) : $y = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}$. Avec $y(0) = \mathrm{C} + 1 = 3$: $y = 2\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}$.

b) $\psi'(x) = -1$ et $\psi(x) + x = -1$: solution. Solutions de (E_2) : $y = Ce^x - x - 1$. Avec $y(0) = C - 1 = 0$: $y = e^x - x - 1$. (On retrouve la fonction dont la positivité traduit l'inégalité $e^x \geqslant x + 1$.)

Corrigé de l'exercice 6.

a) Constante $-\dfrac{-2}{0{,}5} = 4$; solutions $Ce^{0{,}5x} + 4$. f : $C + 4 = 3$, $f(x) = 4 - e^{0{,}5x}$. g : $C = 1$, $g(x) = 4 + e^{0{,}5x}$.

b) $f'(x) = -0{,}5e^{0{,}5x} < 0$: f décroissante, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. $g'(x) = 0{,}5e^{0{,}5x} > 0$: g croissante, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

c) $4 - e^{0{,}5x} = 0 \iff e^{0{,}5x} = 4 \iff x = 2\ln 4 = 4\ln 2 \approx 2{,}77$.

d) $C = 0$: la solution est la constante 4. Mais dès que la valeur initiale s'écarte de 4, même très peu, la solution s'en éloigne indéfiniment (car $a > 0$) : l'équilibre ne « rattrape » pas les solutions voisines, il est instable. Pour $a < 0$ ce serait l'inverse.

Corrigé de l'exercice 7.

a) $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

b) $N(5730) = \dfrac{N_0}{2} \iff e^{-5730\lambda} = \dfrac{1}{2} \iff \lambda = \dfrac{\ln 2}{5730} \approx 1{,}21 \times 10^{-4}$ par an.

c) $e^{-\lambda t} = 0{,}25 = \dfrac{1}{4} \iff t = \dfrac{\ln 4}{\lambda} = \dfrac{2\ln 2}{\ln 2} \times 5730 = 11\,460$ ans : deux demi-vies.

d) $e^{-\lambda t} = 0{,}6 \iff t = -\dfrac{\ln 0{,}6}{\lambda} = \dfrac{5730\ \ln(5/3)}{\ln 2} \approx 4\,223$ ans.

Corrigé de l'exercice 8.

a) $v' = -0{,}5v + 10$, constante $\dfrac{10}{0{,}5} = 20$; $v(t) = Ce^{-0{,}5t} + 20$ avec $C + 20 = 0$: $v(t) = 20 - 20e^{-0{,}5t}$.

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 20$ m/s : vitesse limite. $20 - 20e^{-0{,}5t} = 19 \iff e^{-0{,}5t} = \dfrac{1}{20} \iff t = 2\ln 20 \approx 6{,}0$ s.

c) $C + 20 = 50$, $C = 30$: $v(t) = 20 + 30e^{-0{,}5t}$. $v'(t) = -15e^{-0{,}5t} < 0$: la vitesse décroît de 50 vers 20 m/s. $30e^{-0{,}5t} = 2 \iff t = 2\ln 15 \approx 5{,}4$ s.

d) La même vitesse limite 20 m/s, atteinte par valeurs inférieures dans le premier cas, supérieures dans le second : la valeur d'équilibre $-\dfrac{b}{a}$ ne dépend pas de la condition initiale, seul C en dépend.