MATHÉMATIQUES

Maîtriser les droites et plans de l'espace

Une fiche d'exercices pour décrire droites et plans par des équations, étudier leurs positions relatives et calculer des distances

Fiche de cours : Droites et plans de l'espace.

① Pourquoi cette fiche ?

Décrire une droite ou un plan de l'espace par des équations est un exercice de traduction : on passe d'une donnée géométrique (un point, une direction, une orthogonalité) à une écriture algébrique, puis on calcule. Les erreurs viennent presque toujours d'une confusion de rôles : un vecteur normal pris pour un vecteur directeur, une équation cartésienne attribuée à une droite, un paramètre t qui change d'une coordonnée à l'autre.

Cette fiche isole chaque geste : écrire et lire une représentation paramétrique, obtenir l'équation d'un plan dans les situations courantes, démasquer les erreurs fréquentes, étudier les positions relatives dans tous les cas, calculer un projeté orthogonal et une distance, puis réinvestir tout cela dans deux problèmes concrets.

② Représentations paramétriques

Rappel : lire une représentation paramétrique

Dans $x = x_A + a\,t$, $y = y_A + b\,t$, $z = z_A + c\,t$, les constantes donnent un point A et les coefficients de t un vecteur directeur $\vec{u}$. Un point appartient à la droite si un **même** t vérifie les trois équations.

Exercice 1 *Écrire, lire, tester* Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique $x = 3-2t$, $y = 1+t$, $z = -2+4t$.

a) Donner un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, puis les points de paramètres $t = 2$ et $t = -1$.

b) Écrire une représentation paramétrique de la droite (AB) avec A$(2\ ;\ -1\ ;\ 0)$ et B$(0\ ;\ 3\ ;\ 1)$.

c) Les points M$(-1\ ;\ 3\ ;\ 6)$ et N$(1\ ;\ 2\ ;\ 1)$ appartiennent-ils à $\mathcal{D}$?

d) Écrire une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$ passant par C(1 ; 1 ; 1) et parallèle à $\mathcal{D}$. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles confondues ?

③ Équations de plans

Rappel : quatre situations courantes

Point et vecteur normal : on recopie $\vec{n}$ en coefficients et on calcule d. Trois points : on cherche $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs du plan. Plan parallèle à un plan donné : même vecteur normal. Plan médiateur de [AB] : il passe par le milieu de [AB] et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2 *Quatre plans à équationner* Déterminer une équation cartésienne de chaque plan.

a) $\mathcal{P}_1$ passe par A(2 ; −1 ; 3) et a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$.

b) $\mathcal{P}_2$ passe par A(1 ; 2 ; 0), B(0 ; 1 ; 1) et C(2 ; 0 ; −1).

c) $\mathcal{P}_3$ passe par E(1 ; 1 ; 1) et est parallèle au plan d'équation $2x - y + 3z - 5 = 0$.

d) $\mathcal{P}_4$ est le plan médiateur du segment [AB] avec A(1 ; 0 ; 2) et B(3 ; 4 ; 0). Vérifier le résultat en traduisant $MA^2 = MB^2$.

④ Démasquer les erreurs

Exercice 3 *Cinq raisonnements à corriger* Chaque raisonnement contient une erreur. La repérer et la corriger.

a) « Le plan $x - 2y + z = 4$ a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$. »

b) « M(3 ; 1 ; 2) appartient à la droite $x = 1 + t$, $y = 1$, $z = 2t$, car pour $t = 2$ on a $x = 3$ et pour $t = 1$ on a $z = 2$. »

c) « La droite d'équation $x + y - 2 = 0$ coupe le plan $\mathcal{P}$… »

d) « $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, donc la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$. »

e) « Le plan de vecteur normal $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ passant par A(1 ; 1 ; 1) a pour équation $2x+y-z=0$. »

⑤ Positions relatives

Rappel : le bon test pour chaque couple

Droite et plan : calculer $\vec{u}\cdot\vec{n}$ (nul : parallèle, tester un point ; non nul : sécants, résoudre en t). Deux plans : comparer les vecteurs normaux (colinéaires : parallèles, tester un point ; sinon sécants selon une droite). Deux droites : comparer les vecteurs directeurs, puis chercher un point commun.

Exercice 4 *Une droite face à un plan : les trois cas* Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x-2y+2z-3=0$.

a) $\mathcal{D}_1 : x=1+t, y=t, z=2-t$. Position relative et, le cas échéant, point d'intersection.

b) $\mathcal{D}_2 : x=2t, y=1+t, z=2$. Même question.

c) $\mathcal{D}_3 : x=1+2t, y=1+t, z=2$. Même question.

d) Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_4$ passant par l'origine O et orthogonale à $\mathcal{P}$, déterminer son point d'intersection H avec $\mathcal{P}$ et en déduire la distance de O à $\mathcal{P}$.

Exercice 5 *Plans entre eux, droites entre elles*

a) $\mathcal{P}_1 : x+y-z-2=0$ et $\mathcal{P}_2 : 2x-y+z-1=0$. Justifier qu'ils sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (poser $z=t$).

b) $\mathcal{P}_3 : -2x-2y+2z+1=0$. Position relative de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$?

c) $\mathcal{D}_1 : x=1+t, y=2-t, z=3t$ et $\mathcal{D}_2 : x=2+2s, y=1-2s, z=3+6s$. Position relative ?

d) $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3 : x=s, y=3+s, z=1-s$. Position relative ?

⑥ Projeté orthogonal et distance

Exercice 6 *Projeté, symétrique, distance*

a) Déterminer le projeté orthogonal H de M(2 ; −1 ; 3) sur le plan $\mathcal{P} : x + y + z - 1 = 0$, puis la distance de M à $\mathcal{P}$.

b) En déduire les coordonnées du symétrique M′ de M par rapport à $\mathcal{P}$.

c) Déterminer le projeté orthogonal K de A(1 ; 3 ; −2) sur la droite $\mathcal{D} : x = 2 + t$, $y = t$, $z = 1 - t$, puis la distance de A à $\mathcal{D}$.

⑦ Problèmes en contexte

Exercice 7 *Une pyramide à base carrée* Dans un repère orthonormé, SABCD est une pyramide de base carrée ABCD avec A(0 ; 0 ; 0), B(4 ; 0 ; 0), C(4 ; 4 ; 0), D(0 ; 4 ; 0) et de sommet S(2 ; 2 ; 6).

a) Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (SBC) et qu'une équation de ce plan est $3x + z - 12 = 0$.

b) Déterminer le projeté orthogonal H de A sur le plan (SBC) et la distance de A à ce plan.

c) Calculer le volume du tétraèdre ABCS en prenant ABC pour base. En déduire l'aire du triangle SBC, puis la retrouver par un calcul direct.

Exercice 8 *Un drone près d'une antenne* Dans un repère orthonormé (unité : le mètre, axe des cotes vertical), un drone vole en ligne droite à vitesse constante : à l'instant t (en secondes), il est au point $M_t(10 + 2t\ ;\ -5 + t\ ;\ 30)$. Le sommet d'une antenne est le point A(30 ; 20 ; 40). La réglementation impose de rester à plus de 15 mètres de l'antenne.

a) Donner un vecteur directeur de la trajectoire et justifier que le drone vole à altitude constante.

b) À quel instant le drone est-il le plus proche de l'antenne ? Où se trouve-t-il alors ?

c) La réglementation est-elle respectée ?

d) Un mur vertical occupe le plan d'équation $x + y - 60 = 0$. À quel instant et en quel point la trajectoire le traverse-t-elle ?

⑧ Pour s'auto-évaluer

Rappel : cinq questions à se poser

- Ai-je utilisé un vecteur directeur pour la droite et un vecteur normal pour le plan, sans les confondre ?
- Pour tester l'appartenance d'un point à une droite, ai-je vérifié que le **même** t convient pour les trois coordonnées ?
- Pour l'équation d'un plan, ai-je calculé d avec un point du plan, puis vérifié avec un autre point ?
- Après $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, ai-je testé un point pour distinguer droite incluse et strictement parallèle ?
- Pour un projeté orthogonal, ai-je écrit la bonne droite (dirigée par $\vec{n}$ pour un plan) ou la bonne condition ($\overrightarrow{\mathrm{MH}} \cdot \vec{u} = 0$ pour une droite) ?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

a) Point $(3\ ;\ 1\ ;\ -2)$, vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$. Pour $t=2$: $(-1\ ;\ 3\ ;\ 6)$; pour $t=-1$: $(5\ ;\ 0\ ;\ -6)$.

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$: $x=2-2t$, $y=-1+4t$, $z=t$.

c) M : $3-2t=-1$ donne $t=2$, puis $y=3$ ✓ et $z=6$ ✓ : M $\in \mathcal{D}$. N : $t=1$, puis $y=2$ ✓ mais $z=2\neq 1$: N $\notin \mathcal{D}$.

d) Même vecteur directeur : $x=1-2t$, $y=1+t$, $z=1+4t$. C est-il sur $\mathcal{D}$? $3-2t=1$ donne $t=1$, puis $y=2\neq 1$: non. Les droites sont parallèles et distinctes.

Corrigé de l'exercice 2.

a) $x+3y-2z+d=0$; avec A : $2-3-6+d=0$, $d=7$. $\mathcal{P}_1$: $x+3y-2z+7=0$.

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$, non colinéaires. $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$: $-a-b+c=0$ et $a-2b-c=0$; en ajoutant, $-3b=0$, donc $b=0$ et $c=a$: $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Équation $x+z+d=0$; avec A : $d=-1$. $\mathcal{P}_2$: $x+z-1=0$. Vérification : B : $0+1-1=0$ ✓, C : $2-1-1=0$ ✓.

c) Même vecteur normal $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$: $2x-y+3z+d=0$; avec E : $2-1+3+d=0$, $d=-4$. $\mathcal{P}_3$: $2x-y+3z-4=0$.

d) Milieu I$(2\ ;\ 2\ ;\ 1)$, vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ ou plus simplement $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. Équation $x+2y-z+d=0$; avec I : $2+4-1+d=0$, $d=-5$. $\mathcal{P}_4$: $x+2y-z-5=0$. Vérification : $MA^2=MB^2$ s'écrit $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=(x-3)^2+(y-4)^2+z^2$, soit après développement $-2x-4z+5=-6x-8y+25$, c'est-à-dire $4x+8y-4z-20=0$, ou $x+2y-z-5=0$. ✓

Corrigé de l'exercice 3.

a) Les coefficients de x, y, z donnent un vecteur **normal** au plan, pas un vecteur directeur. Un plan contient une infinité de directions.

b) Le paramètre doit être le même pour les trois coordonnées. Avec $t=2$ (imposé par $x=3$), on obtient $z=4\neq 2$: M $\notin \mathcal{D}$.

c) Dans l'espace, $x+y-2=0$ est l'équation d'un **plan** (de vecteur normal $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$), pas d'une droite. Une droite se décrit par une représentation paramétrique.

d) $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ donne seulement le parallélisme. Il faut vérifier qu'un point de $\mathcal{D}$ est dans $\mathcal{P}$ pour conclure à l'inclusion ; sinon la droite est strictement parallèle.

e) La constante d a été oubliée : $2+1-1+d=0$ donne $d=-2$. Équation correcte : $2x+y-z-2=0$.

Corrigé de l'exercice 4. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\|\vec{n}\|=3$.

a) $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$: $\vec{u}_1\cdot\vec{n}=1-2-2=-3\neq 0$, sécants. $1+t-2t+4-2t-3=2-3t=0$, $t=\dfrac{2}{3}$: I$\left(\dfrac{5}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{4}{3}\right)$. Vérification : $\dfrac{5-4+8}{3}-3=0$. ✓

b) $\vec{u}_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$: $\vec{u}_2\cdot\vec{n}=2-2+0=0$, parallèles. Point $(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$: $0-2+4-3=-1\neq 0$: strictement parallèles.

c) $\vec{u}_3=\vec{u}_2$: parallèles. Point $(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$: $1-2+4-3=0$: $\mathcal{D}_3$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

d) $\mathcal{D}_4$: $x=t$, $y=-2t$, $z=2t$. Dans $\mathcal{P}$: $t+4t+4t-3=9t-3=0$, $t=\dfrac{1}{3}$: H$\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ -\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)$. H est le projeté orthogonal de O : distance OH $=\dfrac{1}{3}\times 3=1$.

Corrigé de l'exercice 5.

a) $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ non colinéaires : sécants. Avec $z=t$: $x+y=2+t$ et $2x-y=1-t$; en ajoutant, $3x=3$, $x=1$, puis $y=1+t$. Droite : $x=1$, $y=1+t$, $z=t$, de vecteur directeur $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, orthogonal à $\vec{n}_1$ $(0+1-1=0)$ et à $\vec{n}_2$ $(0-1+1=0)$. ✓

b) $\vec{n}_3\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}=-2\,\vec{n}_1$: parallèles. Le point $(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$ de $\mathcal{P}_1$ donne $-4+1=-3\neq 0$: strictement parallèles.

c) $\vec{u}_2\begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix} = 2\,\vec{u}_1$: parallèles. Le point $(2\ ;\ 1\ ;\ 3)$ de $\mathcal{D}_2$ est-il sur $\mathcal{D}_1$? $t = 1$ donne $y = 1$ ✓ et $z = 3$ ✓ : les droites sont confondues.

d) $\vec{u}_3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ non colinéaire à $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$. Point commun ? $1+t=s$ et $2-t=3+s$ donnent $2-t=4+t$, $t=-1$, $s=0$; alors z : $3t=-3$ et $1-s=1$, différents. Non coplanaires.

Corrigé de l'exercice 6.

a) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Droite par M dirigée par $\vec{n}$: $x=2+t$, $y=-1+t$, $z=3+t$. Dans $\mathcal{P}$: $2+t-1+t+3+t-1=3+3t=0$, $t=-1$: H$(1\ ;\ -2\ ;\ 2)$. Vérification : $1-2+2-1=0$. ✓ Distance MH $=|t|\times\|\vec{n}\|=\sqrt{3}\approx 1{,}73$.

b) H est le milieu de [MM'] : M' $=2$H$-$M, soit M'$(0\ ;\ -3\ ;\ 1)$. Vérification : $\overrightarrow{\text{HM'}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{MH}}$. ✓

c) K$(2+t\ ;\ t\ ;\ 1-t)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{AK}}\begin{pmatrix}1+t\\t-3\\3-t\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{\text{AK}}\cdot\vec{u} = (1+t)+(t-3)-(3-t) = 3t-5=0$, $t=\dfrac{5}{3}$: K$\left(\dfrac{11}{3}\ ;\ \dfrac{5}{3}\ ;\ -\dfrac{2}{3}\right)$. $\overrightarrow{\text{AK}}\begin{pmatrix}8/3\\-4/3\\4/3\end{pmatrix}$, $\text{AK}^2 = \dfrac{64+16+16}{9} = \dfrac{32}{3}$, AK $=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\approx 3{,}27$.

Corrigé de l'exercice 7.

a) $\overrightarrow{\text{SB}}\begin{pmatrix}2\\-2\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{SC}}\begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix}$, non colinéaires. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{SB}} = 6+0-6=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{SC}} = 6+0-6=0$. Équation $3x+z+d=0$; avec B : $12+d=0$. (SBC) : $3x+z-12=0$. Vérification avec S : $6+6-12=0$. ✓

b) Droite par A dirigée par $\vec{n}$: $x=3t$, $y=0$, $z=t$. Dans le plan : $9t+t-12=0$, $t=\dfrac{6}{5}$: H$\left(\dfrac{18}{5}\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{6}{5}\right)$. Distance AH $=\dfrac{6}{5}\sqrt{10}\approx 3{,}79$.

c) Base ABC : triangle rectangle d'aire $\dfrac{4\times 4}{2}=8$, hauteur 6 (cote de S) : V $=\dfrac{1}{3}\times 8\times 6=16$. Avec la base SBC et la hauteur AH : $16=\dfrac{1}{3}\times$ aire(SBC) $\times\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$, donc aire(SBC) $=\dfrac{48\times 5}{6\sqrt{10}}=\dfrac{40}{\sqrt{10}}=4\sqrt{10}\approx 12{,}65$. Calcul direct : BC $=4$ et la hauteur issue de S tombe au

milieu M(4 ; 2 ; 0) de [BC], avec SM $= \sqrt{4+0+36} = 2\sqrt{10}$: aire $= \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$. ✓

Corrigé de l'exercice 8.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. La cote vaut 30 pour tout t : la trajectoire est parallèle au plan horizontal (troisième coordonnée de $\vec{u}$ nulle).

b) Le point le plus proche est le projeté orthogonal de A sur la trajectoire. $\overrightarrow{\mathrm{AM}_t}\begin{pmatrix}2t-20\\t-25\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}_t} \cdot \vec{u} = 2(2t-20) + (t-25) + 0 = 5t - 65 = 0$, donc $t = 13$ s. Position : $\mathrm{M}_{13}(36\ ;\ 8\ ;\ 30)$.

c) $\overrightarrow{\mathrm{AM}_{13}}\begin{pmatrix}6\\-12\\-10\end{pmatrix}$, $\mathrm{AM}_{13} = \sqrt{36+144+100} = \sqrt{280} = 2\sqrt{70} \approx 16{,}7$ m. La distance minimale dépasse 15 m : la réglementation est respectée.

d) $(10+2t) + (-5+t) - 60 = 3t - 55 = 0$, $t = \frac{55}{3} \approx 18{,}3$ s, au point $\left(\frac{140}{3}\ ;\ \frac{40}{3}\ ;\ 30\right) \approx (46{,}7\ ;\ 13{,}3\ ;\ 30)$.