MATHÉMATIQUES

Maîtriser le dénombrement

Une fiche d'exercices pour compter sans énumérer, choisir le bon modèle et éviter les doubles comptes

Fiche de cours : Dénombrement.

① Pourquoi cette fiche ?

Le dénombrement ne demande presque aucun calcul difficile : des produits, des factorielles, des coefficients binomiaux. Les erreurs viennent de la modélisation : on compte l'ordre quand il ne compte pas, on oublie qu'un tirage est sans remise, on compte deux fois la même main en croyant traiter « au moins un », ou l'on multiplie là où il fallait additionner.

Cette fiche isole chaque geste : appliquer le principe multiplicatif, distinguer arrangements et permutations, démasquer les erreurs de modèle, calculer et utiliser des combinaisons, passer du dénombrement aux probabilités, puis résoudre deux problèmes complets, dont l'un sur les anagrammes avec lettres répétées.

② Le principe multiplicatif

Rappel : « Et » multiplie, « ou » additionne

Des étapes successives (une première lettre **et** une deuxième) se multiplient. Des cas disjoints (deux rouges **ou** deux vertes) s'additionnent. Avant de calculer, dire à voix haute si l'on est dans un « et » ou dans un « ou ».

Exercice 1 *Listes avec répétition*

a) Une plaque d'immatriculation est de la forme AA-123-AA (deux lettres, trois chiffres, deux lettres). Combien de plaques possibles ?

b) Combien de numéros de téléphone à 10 chiffres commencent par 06 ou 07 ?

c) On lance 5 dés à six faces de couleurs différentes. Combien de résultats possibles ?

d) Combien un ensemble à 6 éléments possède-t-il de sous-ensembles ? Combien d'entre eux contiennent un élément donné ?

③ Arrangements et permutations

Exercice 2 *Sans répétition, l'ordre compte*

a) De combien de façons 4 personnes peuvent-elles s'asseoir sur un banc de 4 places ?

b) De combien de façons 5 personnes peuvent-elles occuper 3 chaises numérotées ?

c) Combien de mots de 4 lettres distinctes peut-on former avec l'alphabet ?

d) Combien d'anagrammes possède le mot LIVRE ? Combien commencent par une voyelle ?

e) Combien de tiercés dans l'ordre pour une course de 12 chevaux ?

④ Démasquer les erreurs

Exercice 3 *Cinq raisonnements à corriger* Chaque raisonnement contient une erreur. La repérer et la corriger.

a) « Le nombre de mains de 5 cartes parmi 52 est $52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48$. »

b) « Il y a $\binom{10}{4}$ codes à 4 chiffres. »

c) « $\binom{8}{3} = 8 \times 7 \times 6 = 336$. »

d) « Comités de 3 personnes avec au moins une fille, parmi 4 filles et 6 garçons : on choisit une fille (4 façons) puis 2 personnes parmi les 9 restantes : $4 \times \binom{9}{2} = 144$. »

e) « Tirer 2 rouges ou 2 vertes parmi 5 rouges et 3 vertes (tirage de 2 boules) : $\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} = 30$. »

⑤ Combinaisons

Rappel : quand l'ordre ne compte pas

Si permuter les éléments choisis ne change pas l'issue (une main, un comité, une équipe sans rôles), on compte des combinaisons : $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$. La symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ raccourcit les calculs quand k est proche de n.

Exercice 4 *Calculs et choix multiples*

a) Calculer $\binom{8}{3}$, $\binom{20}{2}$, $\binom{15}{13}$, $\binom{100}{1}$ et $\binom{6}{0}$.

b) Combien d'équipes de 11 joueurs peut-on former parmi 16 ?

c) Un menu « dégustation » se compose de 2 entrées choisies parmi 5 et de 3 plats choisis parmi 6. Combien de menus ?

d) Une grille de loterie demande de cocher 5 numéros parmi 49 et 1 étoile parmi 10. Combien de grilles ? Quelle est la probabilité de gagner avec une grille ?

⑥ Du dénombrement aux probabilités

Exercice 5 *Mains de cartes* On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (4 couleurs de 8 cartes, dont 4 as et 4 rois).

a) Combien de mains possibles ?

b) Probabilité d'obtenir les 4 as ?

c) Probabilité d'obtenir exactement 2 cœurs ?

d) Probabilité d'obtenir au moins un roi ?

Exercice 6 *Chemins et coefficients binomiaux*

a) Sur un quadrillage, on va de $(0\ ;\ 0)$ à $(5\ ;\ 4)$ par des pas vers la droite ou vers le haut. Combien de chemins ?

b) Combien de ces chemins passent par le point $(2\ ;\ 2)$?

c) On choisit un chemin au hasard. Quelle est la probabilité qu'il passe par $(2\ ;\ 2)$?

d) On lance 6 fois une pièce équilibrée. Combien de suites de résultats comportent exactement 2 « pile » ? En déduire la probabilité d'obtenir exactement 2 « pile ».

⑦ Problèmes en contexte

Exercice 7 *La composition d'un jury* Un jury de 4 personnes est tiré au sort parmi 12 candidats : 7 femmes et 5 hommes.

a) Combien de jurys possibles ?

b) Combien de jurys comportent exactement 2 femmes ?

c) Combien de jurys comportent au moins un homme ?

d) On désigne ensuite un président parmi les 4 membres. Combien de jurys « avec président » ? Retrouver ce nombre en choisissant d'abord le président.

Exercice 8 *Anagrammes avec lettres répétées*

a) Pour former une anagramme de ANANAS, on choisit d'abord les 3 positions des A parmi 6, puis les 2 positions des N parmi les positions restantes, et le S prend la dernière. Combien d'anagrammes ?

b) Retrouver ce nombre en partant des 6! permutations des lettres et en tenant compte des lettres identiques.

c) Combien d'anagrammes possède BANANE ?

d) Combien d'anagrammes de ANANAS commencent et finissent par un A ?

⑧ Pour s'auto-évaluer

Rappel : cinq questions à se poser

- Ai-je répondu aux deux questions « répétition possible ? » et « l'ordre compte-t-il ? » avant d'écrire une formule ?
- Pour une combinaison, ai-je bien divisé par $k!$?
- Pour « au moins un », suis-je passé par l'événement contraire plutôt que par un choix « d'abord un, puis les autres » ?
- Entre des étapes successives ai-je multiplié, entre des cas disjoints ai-je additionné ?
- Mon résultat a-t-il un ordre de grandeur plausible (un comité ne se compte pas en millions) ?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

a) $26^2 \times 10^3 \times 26^2 = 26^4 \times 1\,000 = 456\,976\,000$.

b) Les deux premiers chiffres sont imposés (2 possibilités), les 8 autres libres : $2 \times 10^8 = 200\,000\,000$.

c) 5-uplets d'éléments de $\{1, \ldots, 6\}$: $6^5 = 7\,776$.

d) $2^6 = 64$ sous-ensembles. Ceux qui contiennent un élément donné correspondent aux sous-ensembles des 5 autres éléments : $2^5 = 32$, soit la moitié.

Corrigé de l'exercice 2.

a) Permutations : $4! = 24$.

b) Arrangements de 3 parmi 5 : $5 \times 4 \times 3 = 60$.

c) $26 \times 25 \times 24 \times 23 = 358\,800$.

d) Cinq lettres distinctes : $5! = 120$ anagrammes. Première lettre I ou E (2 choix), puis $4! = 24$ ordres pour les autres : $2 \times 24 = 48$.

e) $12 \times 11 \times 10 = 1\,320$.

Corrigé de l'exercice 3.

a) Une main n'est pas ordonnée : il faut diviser par $5!$. $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

b) Un code est une liste ordonnée avec répétitions possibles : $10^4 = 10\,000$. $\binom{10}{4} = 210$ compterait des ensembles de 4 chiffres distincts, sans ordre.

c) Il manque la division par $3!$: $\binom{8}{3} = \dfrac{336}{6} = 56$.

d) Un comité avec deux filles est compté deux fois (une fois pour chaque fille « choisie d'abord »). Correct : tous les comités moins ceux sans fille, $\binom{10}{3} - \binom{6}{3} = 120 - 20 = 100$.

e) Les deux cas sont disjoints, il faut **additionner** : $\binom{5}{2} + \binom{3}{2} = 10 + 3 = 13$ tirages.

Corrigé de l'exercice 4.

a) $\binom{8}{3} = 56$; $\binom{20}{2} = 190$; $\binom{15}{13} = \binom{15}{2} = 105$; $\binom{100}{1} = 100$; $\binom{6}{0} = 1$.

b) $\binom{16}{11} = \binom{16}{5} = \dfrac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{120} = 4\,368$.

c) $\binom{5}{2} \times \binom{6}{3} = 10 \times 20 = 200$.

d) $\binom{49}{5} \times 10 = 1\,906\,884 \times 10 = 19\,068\,840$ grilles ; probabilité $\dfrac{1}{19\,068\,840} \approx 5{,}2 \times 10^{-8}$.

Corrigé de l'exercice 5.

a) $\binom{32}{5} = 201\,376$.

b) Les 4 as et 1 carte parmi les 28 autres : $\dfrac{\binom{4}{4} \times \binom{28}{1}}{201\,376} = \dfrac{28}{201\,376} \approx 1{,}4 \times 10^{-4}$.

c) 2 cœurs parmi 8 et 3 cartes parmi les 24 autres : $\dfrac{\binom{8}{2} \times \binom{24}{3}}{201\,376} = \dfrac{28 \times 2\,024}{201\,376} = \dfrac{56\,672}{201\,376} \approx 0{,}28$.

d) Contraire : aucun roi, soit 5 cartes parmi 28 : $\binom{28}{5} = 98\,280$. $P = 1 - \dfrac{98\,280}{201\,376} \approx 0{,}51$.

Corrigé de l'exercice 6.

a) 9 pas dont 4 vers le haut : $\binom{9}{4} = 126$ chemins.

b) De (0 ; 0) à (2 ; 2) : $\binom{4}{2} = 6$ chemins ; de (2 ; 2) à (5 ; 4) : 5 pas dont 2 vers le haut, $\binom{5}{2} = 10$. Principe multiplicatif : $6 \times 10 = 60$.

c) $\dfrac{60}{126} = \dfrac{10}{21} \approx 0{,}48$.

d) $\binom{6}{2} = 15$ suites. Les $2^6 = 64$ suites étant équiprobables, $P = \dfrac{15}{64} \approx 0{,}23$. C'est $P(X = 2)$ pour X de loi $\mathcal{B}\left(6 ; \dfrac{1}{2}\right)$.

Corrigé de l'exercice 7.

a) $\binom{12}{4} = 495$.

b) $\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} = 21 \times 10 = 210$.

c) Contraire : que des femmes, $\binom{7}{4} = 35$. Donc $495 - 35 = 460$.

d) $495 \times 4 = 1\,980$. Autre méthode : 12 choix pour le président, puis $\binom{11}{3} = 165$ pour les trois autres : $12 \times 165 = 1\,980$. ✓

Corrigé de l'exercice 8.

a) $\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} \times 1 = 20 \times 3 = 60$.

b) Les $6! = 720$ permutations comptent chaque anagramme $3! \times 2! = 12$ fois (permutations des A entre eux et des N entre eux) : $\dfrac{720}{12} = 60$. ✓

c) Lettres : A, A, N, N, B, E. Positions des A : $\binom{6}{2} = 15$; des N : $\binom{4}{2} = 6$; B et E dans les deux dernières : 2. Total $15 \times 6 \times 2 = 180$ (ou $\dfrac{6!}{2!\,2!} = 180$).

d) Un A à chaque extrémité ; il reste à ordonner A, N, N, S sur les 4 positions centrales : $\dfrac{4!}{2!} = 12$ anagrammes.