MATHÉMATIQUES

Maîtriser la convexité

Une fiche d'exercices pour lire, calculer et exploiter la convexité d'une fonction

Fiche de cours : Convexité.

① Pourquoi cette fiche ?

La convexité est une notion courte dans le programme mais redoutable dans les copies : elle demande de tenir ensemble trois objets, la fonction, sa dérivée et sa dérivée seconde, sans les confondre. L'erreur la plus fréquente consiste à lire les variations là où l'on attend la convexité, ou à conclure à un point d'inflexion dès que la dérivée seconde s'annule.

Cette fiche isole chaque geste : lire une convexité sur un graphique, calculer une dérivée seconde sans faute, repérer les points d'inflexion avec leur condition complète, exploiter une tangente pour démontrer une inégalité, puis réinvestir tout cela dans une étude de fonction et deux problèmes en contexte.

② Lire et reconnaître

Rappel : deux questions distinctes

« La fonction monte ou descend ? » se lit sur le signe de f'. « La courbe se creuse vers le haut ou vers le bas ? » se lit sur le signe de f''. Une fonction peut monter en se creusant vers le bas (comme ln) : elle est croissante et concave.

Exercice 1 *Convexité et variations sur un tableau* On donne le tableau de signes de f' et de f'' d'une fonction f définie sur $[-3\ ;\ 3]$: f' est négative sur $[-3\ ;\ 0]$ et positive sur $[0\ ;\ 3]$; f'' est positive sur $[-3\ ;\ -1]$, négative sur $[-1\ ;\ 2]$ et positive sur $[2\ ;\ 3]$.

a) Sur quel(s) intervalle(s) f est-elle décroissante ? convexe ?

b) Sur quel intervalle f est-elle à la fois croissante et concave ?

c) Quelles sont les abscisses des points d'inflexion ? Celle de l'extremum ?

d) Tracer à main levée une courbe compatible avec ces informations.

Exercice 2 *Reconnaître à partir des fonctions de référence* Sans calcul, dire si chaque fonction est convexe ou concave sur l'intervalle donné, puis vérifier par la dérivée seconde.

a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = -2\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$

c) $h(x) = \ln x + x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

d) $k(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$

③ Calculer une dérivée seconde

Rappel : dériver deux fois

On dérive f puis on dérive le résultat. Pour un produit, la règle $(uv)' = u'v + uv'$ s'applique deux fois ; il est utile de factoriser f' avant de la dériver à nouveau, surtout avec une exponentielle.

Exercice 3 *Dérivées secondes et signe* Pour chaque fonction, calculer $f''(x)$, le factoriser si possible et étudier la convexité.

a) $f(x) = x^4 - 2x^3$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

c) $h(x) = x \ln x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

d) $k(x) = \mathrm{e}^x - x^2$ sur $\mathbb{R}$ (on admettra que $\mathrm{e}^x - 2$ change de signe en $\ln 2$)

④ Démasquer les erreurs

Exercice 4 *Cinq raisonnements à corriger* Chaque raisonnement contient une erreur. La repérer et la corriger.

a) « $f(x) = x^4$ vérifie $f''(0) = 0$, donc la courbe a un point d'inflexion en 0. »

b) « ln est croissante, donc sa courbe est au-dessus de ses tangentes. »

c) « $f''(x) = 6x - 6$ s'annule en 1, donc f admet un minimum en 1. »

d) « f est concave sur $[0\ ;\ 4]$, donc f est décroissante sur $[0\ ;\ 4]$. »

e) « L'exponentielle est convexe et sa tangente en 0 est $y = x + 1$, donc $\mathrm{e}^x \leqslant x + 1$. »

⑤ Inégalités par les tangentes

Rappel : la méthode en trois lignes

Convexe sur I : pour tout x de I, $f(x) \geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$. Concave : inégalité inversée. On choisit le point a pour retrouver le membre de droite voulu.

Exercice 5 *Trois inégalités classiques*

a) Montrer que pour tout $x>0$, $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x+1}{2}$. En déduire que pour tous réels positifs a et b, $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

b) Montrer que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^2(x-1)$.

c) Montrer que pour tout $x>0$, $\ln x \leqslant \dfrac{x}{\mathrm{e}}$. En déduire que $\ln x < x$ pour tout $x>0$.

⑥ Étude complète

Exercice 6 *Une fonction avec exponentielle* Soit $f(x)=(x^2-3)\,\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $f'(x)=(x^2+2x-3)\,\mathrm{e}^x$ et factoriser x^2+2x-3.

b) Dresser le tableau de variations de f (on admet $f(x)\to 0$ en $-\infty$ et $f(x)\to+\infty$ en $+\infty$).

c) Montrer que $f''(x)=(x^2+4x-1)\,\mathrm{e}^x$ et déterminer les abscisses des points d'inflexion (valeurs exactes puis arrondies au centième).

d) Sur quel intervalle f est-elle concave ?

⑦ Problèmes en contexte

Exercice 7 *Propagation d'une rumeur* Le nombre de personnes informées d'une rumeur, en centaines, après t jours $(0 \leqslant t \leqslant 12)$ est modélisé par $\mathrm{N}(t) = \dfrac{20}{1 + 19\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$. On admet que $\mathrm{N}'(t) = \dfrac{190\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}}{(1 + 19\,\mathrm{e}^{-0{,}5t})^2}$ et que N'' a le signe de $19\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 1$.

a) Vérifier que $\mathrm{N}(0) = 1$ et interpréter.

b) Justifier que N est croissante sur $[0\ ;\ 12]$.

c) Résoudre $19\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 1 = 0$ et en déduire la convexité de N sur $[0\ ;\ 12]$.

d) Que représente le point d'inflexion pour la propagation de la rumeur ? Combien de personnes sont informées à cet instant ?

Exercice 8 *Rendements d'une exploitation* La récolte $\mathrm{R}(x)$, en tonnes, d'une exploitation en fonction de la quantité x d'engrais utilisée, en centaines de kilogrammes $(0 \leqslant x \leqslant 8)$, est modélisée par $\mathrm{R}(x) = -0{,}25x^3 + 3x^2 + 4x + 30$.

a) Calculer $\mathrm{R}'(x)$ et vérifier que R est croissante sur $[0\ ;\ 8]$.

b) Calculer $\mathrm{R}''(x)$ et déterminer le point d'inflexion de la courbe.

c) Le rendement marginal est $\mathrm{R}'(x)$: le gain de récolte pour cent kilogrammes d'engrais supplémentaires. Pour quelle valeur de x est-il maximal ? Que vaut-il ?

d) Un agronome affirme : « Au-delà de quatre cents kilogrammes, ajouter de l'engrais rapporte de moins en moins. » Cette affirmation est-elle exacte ? Signifie-t-elle que la récolte diminue ?

⑧ Pour s'auto-évaluer

Rappel : cinq questions à se poser

- Ai-je bien lu les variations sur f' et la convexité sur f'', sans mélanger les deux ?
- Ai-je factorisé f'' avant d'étudier son signe ?
- Pour un point d'inflexion, ai-je vérifié que f'' **change de signe**, et pas seulement qu'elle s'annule ?
- Pour une inégalité, ai-je écrit l'équation de la tangente au bon point et choisi le bon sens (convexe : au-dessus ; concave : en dessous) ?
- Dans un problème, ai-je interprété le point d'inflexion comme le passage d'une accélération à un ralentissement ?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

a) Décroissante sur $[-3\ ;\ 0]$ (signe de f'). Convexe sur $[-3\ ;\ -1]$ et sur $[2\ ;\ 3]$ (signe de f'').

b) Croissante et concave sur $[0\ ;\ 2]$: $f' \geqslant 0$ et $f'' \leqslant 0$.

c) Points d'inflexion en -1 et 2 (f'' change de signe). Minimum en 0 (f' change de signe de $-$ à $+$).

d) La courbe descend en se creusant vers le haut jusqu'à -1, puis descend en se bombant jusqu'au minimum en 0, remonte en restant bombée jusqu'à 2, puis remonte en se creusant vers le haut. Elle traverse sa tangente en -1 et en 2.

Corrigé de l'exercice 2.

a) Parabole tournée vers le haut ($a = 3 > 0$) : convexe. $f''(x) = 6 > 0$. ✓

b) L'exponentielle est convexe, son opposé est concave, et le facteur 2 ne change rien : concave. $g''(x) = -2\,\mathrm{e}^x < 0$. ✓

c) Somme de ln (concave) et d'une fonction affine (convexe et concave) : concave. $h''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. ✓

d) Sur $]-\infty\ ;\ 0[$, la courbe de $\dfrac{1}{x}$ est bombée vers le bas : concave. $k''(x) = \dfrac{2}{x^3} < 0$ pour $x < 0$. ✓ (Attention : la même fonction est convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$.)

Corrigé de l'exercice 3.

a) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$. Positif à l'extérieur de $[0\ ;\ 1]$, négatif entre : f convexe sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et $[1\ ;\ +\infty[$, concave sur $[0\ ;\ 1]$. Deux points d'inflexion, en 0 et 1.

b) $g'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$; $g''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\,\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$. Signe de $x-2$: g concave sur $]-\infty\ ;\ 2]$, convexe sur $[2\ ;\ +\infty[$, inflexion en 2.

c) $h'(x) = \ln x + 1$, $h''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$: h convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$.

d) $k'(x) = \mathrm{e}^x - 2x$, $k''(x) = \mathrm{e}^x - 2$, négatif pour $x < \ln 2$ et positif pour $x > \ln 2$: k concave sur $]-\infty\ ;\ \ln 2]$, convexe sur $[\ln 2\ ;\ +\infty[$, inflexion en $\ln 2 \approx 0{,}69$.

Corrigé de l'exercice 4.

a) $f''(x) = 12x^2 \geqslant 0$ ne change pas de signe en 0 : pas d'inflexion, f est convexe sur $\mathbb{R}$. L'annulation de f'' est nécessaire mais pas suffisante.

b) La croissance ne dit rien sur la position par rapport aux tangentes. ln est concave ($(\ln)'' = -1/x^2 < 0$), donc sa courbe est **en dessous** de ses tangentes.

c) Le signe de f'' renseigne sur la convexité, pas sur les extremums. En 1, f'' change de signe : c'est un point d'inflexion. Un minimum se cherche avec f'.

d) Concave signifie que la pente diminue, pas qu'elle est négative. $\sqrt{x}$ est concave et croissante sur $[0\ ;\ 4]$.

e) Convexe signifie courbe au-dessus des tangentes : $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$. Le sens de l'inégalité a été inversé.

Corrigé de l'exercice 5.

a) $u(x)=\sqrt{x}$ est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$ $(u''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}<0)$. Tangente en 1 : $u(1)=1$, $u'(1)=\frac{1}{2}$, donc $y=\frac{1}{2}(x-1)+1=\dfrac{x+1}{2}$. Courbe sous la tangente : $\sqrt{x}\leqslant\dfrac{x+1}{2}$. Pour $a,b>0$, on pose $x=\dfrac{a}{b}$: $\sqrt{\dfrac{a}{b}}\leqslant\dfrac{a/b+1}{2}$, puis en multipliant par $b>0$: $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{a+b}{2}$ (inégalité arithmético-géométrique). Le cas $a=0$ ou $b=0$ est immédiat.

b) Exponentielle convexe ; tangente en 2 : $y=\mathrm{e}^2(x-2)+\mathrm{e}^2=\mathrm{e}^2(x-1)$. Courbe au-dessus : $\mathrm{e}^x\geqslant\mathrm{e}^2(x-1)$.

c) ln concave ; tangente en e : $\ln\mathrm{e}=1$, $(\ln)'(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, donc $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})+1=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$. Courbe sous la tangente : $\ln x\leqslant\dfrac{x}{\mathrm{e}}$. Comme $\dfrac{x}{\mathrm{e}}<x$ pour $x>0$, on obtient $\ln x<x$.

Corrigé de l'exercice 6.

a) $f'(x)=2x\,\mathrm{e}^x+(x^2-3)\,\mathrm{e}^x=(x^2+2x-3)\,\mathrm{e}^x$. Discriminant $\Delta=4+12=16$, racines $x=\dfrac{-2\pm4}{2}$, soit -3 et 1 : $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$.

b) f' a le signe de $(x+3)(x-1)$: positif sur $]-\infty\ ;\ -3]$, négatif sur $[-3\ ;\ 1]$, positif sur $[1\ ;\ +\infty[$. Maximum local $f(-3)=6\,\mathrm{e}^{-3}\approx0{,}30$, minimum local $f(1)=-2\mathrm{e}\approx-5{,}44$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$6\,\mathrm{e}^{-3}$	↘	$-2\mathrm{e}$	↗	$+\infty$

c) $f''(x)=(2x+2)\,\mathrm{e}^x+(x^2+2x-3)\,\mathrm{e}^x=(x^2+4x-1)\,\mathrm{e}^x$. Racines de x^2+4x-1 : $\Delta=16+4=20$, $x=\dfrac{-4\pm2\sqrt{5}}{2}=-2\pm\sqrt{5}$, soit $x_1=-2-\sqrt{5}\approx-4{,}24$ et $x_2=-2+\sqrt{5}\approx0{,}24$. Le trinôme change de signe en chacune : deux points d'inflexion.

d) $f''\leqslant0$ entre les racines : f est concave sur $[-2-\sqrt{5}\ ;\ -2+\sqrt{5}]$, convexe ailleurs.

Corrigé de l'exercice 7.

a) $\mathrm{N}(0)=\dfrac{20}{1+19}=1$: une centaine de personnes est informée au départ.

b) $\mathrm{N}'(t)$ est un quotient de quantités strictement positives : $\mathrm{N}'>0$, donc N est croissante. Le nombre de personnes informées augmente sans cesse.

c) $19\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 1 \iff \mathrm{e}^{-0{,}5t} = \dfrac{1}{19} \iff -0{,}5t = -\ln 19 \iff t = 2\ln 19 \approx 5{,}89$. Pour $t < 2\ln 19$, $19\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} > 1$ donc $\mathrm{N}'' > 0$: N convexe ; pour $t > 2\ln 19$, N concave.

d) Le point d'inflexion est l'instant où la propagation cesse d'accélérer et commence à ralentir : la vitesse de diffusion N′ est maximale vers le sixième jour. À cet instant $\mathrm{N}(2\ln 19) = \dfrac{20}{1+1} = 10$: mille personnes, soit la moitié de la valeur limite 20 (deux mille personnes). C'est une propriété générale des courbes de ce type (courbes logistiques) : l'inflexion est à mi-hauteur.

Corrigé de l'exercice 8.

a) $\mathrm{R}'(x) = -0{,}75x^2 + 6x + 4$. Son discriminant vaut $36 + 12 = 48$, ses racines $\dfrac{-6 \pm \sqrt{48}}{-1{,}5}$, soit environ $-0{,}62$ et $8{,}62$: R′ est positif entre ses racines, donc sur tout $[0\ ;\ 8]$. R est croissante.

b) $\mathrm{R}''(x) = -1{,}5x + 6 = -1{,}5(x-4)$: positif pour $x < 4$, négatif pour $x > 4$. Point d'inflexion en $x = 4$, d'ordonnée $\mathrm{R}(4) = -16 + 48 + 16 + 30 = 78$.

c) R′ croît là où $\mathrm{R}'' > 0$ et décroît là où $\mathrm{R}'' < 0$: le rendement marginal est maximal en $x = 4$ et vaut $\mathrm{R}'(4) = -12 + 24 + 4 = 16$ tonnes par centaine de kilogrammes.

d) Exacte : au-delà de $x = 4$, R est concave, donc R′ décroît : chaque centaine de kilogrammes supplémentaire rapporte moins que la précédente (rendements décroissants). Mais $\mathrm{R}' > 0$ sur $[0\ ;\ 8]$: la récolte continue d'augmenter. « Rapporter de moins en moins » ne signifie pas « faire baisser ».