MATHÉMATIQUES

Maîtriser le calcul littéral

Une fiche d'exercices pour comprendre la lettre comme nombre, le signe égal et les manipulations algébriques

Fiche de cours : Calcul littéral.

① Pourquoi cette fiche ?

Le passage du calcul numérique au calcul littéral est l'un des moments les plus délicats du collège. Une lettre comme a ou x n'est ni l'abréviation d'un mot, ni le nom d'un objet : c'est un nombre, dont on ne précise pas la valeur. L'écriture $3a$ ne désigne pas non plus la juxtaposition des chiffres 3 et a : c'est le produit $3 \times a$. Quant au signe « = », il ne signifie pas « donne le résultat » comme en arithmétique, mais traduit une relation d'**équivalence** entre deux expressions qui désignent le même nombre.

Cette fiche aborde le calcul littéral en partant de ces malentendus pour les démasquer. Elle est organisée autour de cinq idées-forces : la lettre est un nombre, le signe égal est une relation, la substitution donne du sens à la lettre, certaines expressions sont déjà sous leur forme la plus simple, et la distributivité a une interprétation géométrique.

② La lettre est un nombre

Rappel : ce qu'une lettre désigne, et ce qu'elle ne désigne pas

Dans une expression algébrique, une lettre désigne toujours un **nombre** dont on ne précise pas la valeur (ou qui peut prendre plusieurs valeurs). Trois confusions à éviter.

- **La lettre n'est pas une abréviation :** dans « $3a$ », la lettre a ne signifie pas « abricot » ni « animal ». C'est un nombre.
- **La lettre n'est pas une étiquette d'objet :** si l'on note p le prix d'un crayon, la lettre p représente le nombre d'euros, pas le crayon lui-même. Écrire « $5p$ » ne signifie pas « 5 crayons », mais « 5 fois le prix d'un crayon ».
- **« $3a$ » n'est pas la concaténation des chiffres** 3 **et** a **:** si a vaut 1, alors $3a$ vaut 3 (et non 31). L'écriture $3a$ est un **produit :** $3a = 3 \times a$.

Exercice 1 *Décoder une écriture algébrique* Pour chacune des écritures suivantes, donner sa signification en toutes lettres (sous forme d'une opération entre nombres).

a) $5x$ b) $\frac{a}{2}$ c) $a + b$

d) $2x + 3$ e) x^2 f) $-3a$

Exercice 2 *Démasquer la concaténation* Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

a) Si $a = 1$, alors $3a = 31$.

b) Si $a = 5$, alors $2a = 25$.

c) Si $x = 0$, alors $7x = 0$.

d) Si $b = 1$, alors $b + b = 11$.

Exercice 3 *Lettre-objet ou lettre-nombre ?* Léa lit l'énoncé suivant : « p désigne le prix d'un crayon en euros. Écrire le prix de 5 crayons en fonction de p. » Elle écrit : « 5 crayons coûtent $5p$ euros, donc p vaut 5 crayons ».

a) Identifier la confusion commise par Léa.

b) Écrire correctement ce que représente p, et ce que représente $5p$.

③ Le signe égal : opérateur ou relation ?

Rappel : deux conceptions du signe « = »

En arithmétique, on utilise souvent le signe = pour signifier « donne le résultat » : $3+5 = 8$. Mais cette conception est trop pauvre pour le calcul littéral.
En algèbre, le signe = exprime une **équivalence** : deux expressions désignent le même nombre, quelles que soient les valeurs des lettres. L'égalité fonctionne alors dans les deux sens.

$$2(x + 3) = 2x + 6.$$

Cette égalité signifie que les deux expressions sont strictement équivalentes : pour toute valeur de x, elles donnent le même nombre. On peut donc écrire $2x + 6 = 2(x + 3)$ tout aussi bien.
Conséquence pratique. Une expression peut figurer indifféremment à gauche ou à droite du signe =, et l'égalité $3 + 5 =? + 2$ a un sens (avec $? = 6$) parce que « = » exprime « de chaque côté, on a la même quantité », pas « à gauche, on attend le résultat à droite ».

Exercice 4 *Compléter pour rendre l'égalité vraie* Compléter les égalités suivantes par un nombre qui les rend vraies.

a) $3+5=?+2$ b) $7-4=1+?$ c) $?\times 4=12$

d) $9+?=4+8$ e) $?+?=10$ (deux nombres égaux) f) $2\times 5=?-3$

Exercice 5 *Vrai ou faux sur des égalités algébriques* Pour chacune des égalités suivantes, dire si elle est vraie pour toute valeur de la lettre, ou seulement pour certaines valeurs (à préciser).

a) $2(x+3)=2x+6$

b) $x+5=12$

c) $x+x=2x$

d) $3x=9$

e) $x\times 0=0$

f) $x+1=x$

④ Substitution : la lettre prend une valeur

Rappel : donner du sens à la lettre en la remplaçant par un nombre

La meilleure façon de comprendre une expression algébrique est de **substituer** la lettre par différentes valeurs et d'observer le résultat. Cette pratique a deux vertus.

- Elle ancre la lettre comme nombre, et non comme symbole abstrait.
- Elle permet de **vérifier** une égalité algébrique : si l'égalité est vraie, elle l'est pour n'importe quelle valeur testée. Si l'on trouve une valeur pour laquelle l'égalité est fausse, alors l'égalité est globalement fausse.

Exercice 6 *Calculer une expression pour plusieurs valeurs* Soit $A=3x+2$. Calculer la valeur de A pour les valeurs de x suivantes.

a) $x=0$ b) $x=1$ c) $x=2$ d) $x=-1$

e) $x=5$ f) $x=\frac{1}{2}$

Exercice 7 *Vérifier une égalité par substitution* Pour chacune des égalités suivantes, vérifier si elle est vraie en testant deux valeurs distinctes de x (par exemple $x = 0$ et $x = 1$). Si l'égalité est fausse pour au moins une valeur, conclure qu'elle est fausse.

a) $2(x + 5) = 2x + 10$

b) $(x + 1)^2 = x^2 + 1$

c) $3x + 2x = 5x$

d) $4x - x = 4$

e) $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$

5 Programmes de calcul : généraliser une procédure

Rappel : de l'exemple à la formule

Un **programme de calcul** est une suite d'instructions appliquée à un nombre de départ. En testant le programme sur plusieurs nombres, on peut conjecturer un résultat général. Pour le **prouver**, on remplace le nombre de départ par une lettre et l'on déroule le programme algébriquement.

Exercice 8 *Conjecturer puis prouver* On considère le programme de calcul suivant.

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 5.
- Multiplier le résultat par 2.
- Soustraire 10.
- Diviser le résultat par 2.

a) Tester le programme avec les nombres 3, 7 et -1. Que remarque-t-on ?

b) Conjecturer ce que fait ce programme.

c) Prouver la conjecture en remplaçant le nombre de départ par x et en déroulant le calcul.

Exercice 9 *Prouver une régularité*

a) Choisir trois nombres consécutifs (par exemple 5, 6, 7). Calculer leur somme.

b) Recommencer avec 10, 11, 12. Calculer leur somme.

c) Recommencer avec -2, -1, 0. Calculer leur somme.

d) Conjecturer une propriété générale.

e) Prouver la conjecture en notant n le plus petit des trois nombres consécutifs.

6 Réduire une expression : quand peut-on, quand ne peut-on pas ?

Rappel : le besoin de clôture : une expression peut rester « ouverte »

Face à une expression comme $3x + 2$, certains élèves cherchent à tout prix à la simplifier en un seul terme, par exemple en écrivant $3x + 2 = 5x$. Cette erreur traduit un besoin de **clôture** : l'élève veut une réponse « finie », sans terme restant.
Or, $3x + 2$ est déjà sous sa forme la plus simple. Le terme $3x$ contient une lettre, le terme 2 n'en contient pas : ils ne sont pas **semblables** et ne peuvent pas être réduits ensemble. C'est analogue à la situation où l'on additionnerait 3 pommes et 2 ans : les unités ne sont pas comparables.
Règle. On peut réduire deux termes seulement s'ils sont **semblables**, c'est-à-dire s'ils ont la même partie littérale.

$3x + 2x = 5x$; $4y - y = 3y$; $3x + 2$ ne se réduit pas.

Exercice 10 *Démasquer le besoin de clôture* Voici quatre productions d'élèves. Pour chacune, dire si elle est correcte. Si elle est incorrecte, identifier l'erreur et donner le résultat juste.

a) $3x + 2 = 5x$

b) $4a - 2a = 2a$

c) $5y + 3y = 8y^2$

d) $7x + 2 - 3x = 4x + 2$

Exercice 11 *Réduire ce qui peut l'être* Réduire chacune des expressions suivantes, lorsque c'est possible. Sinon, indiquer que l'expression est déjà sous forme réduite.

a) $5x + 3x$ b) $4a + 7$ c) $6y - 2y + 3y$

d) $2x + 5 - x + 1$ e) $3a + 2b$ f) $8t - 5t - 3t$

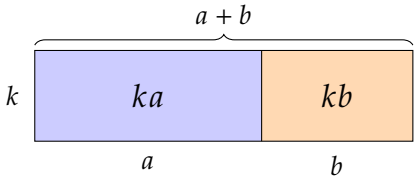
⑦ Distributivité simple

Rappel : multiplier une somme par un facteur

La **distributivité** traduit le fait que multiplier un facteur par une somme revient à multiplier ce facteur par chaque terme, puis à additionner les résultats.

$$k(a+b) = ka + kb \quad ; \quad k(a-b) = ka - kb.$$

On peut justifier cette règle par le calcul d'une aire : un rectangle de longueur $a+b$ et de largeur k a pour aire $k(a+b)$, et il se découpe en deux rectangles d'aires ka et kb.



Exercice 12 *Développer une expression* Développer chaque expression.

a) $3(x+4)$ b) $5(a-2)$ c) $2(3y+1)$

d) $-4(x+7)$ e) $-(2a+5)$ f) $\frac{1}{2}(6x-8)$

Exercice 13 *Factoriser une expression* Factoriser chacune des expressions suivantes en mettant en facteur le nombre indiqué.

a) $5x + 10$ (facteur 5)

b) $6a - 9$ (facteur 3)

c) $4y + 12$ (facteur 4)

d) $14x - 7$ (facteur 7)

e) $-3a + 6$ (facteur 3)

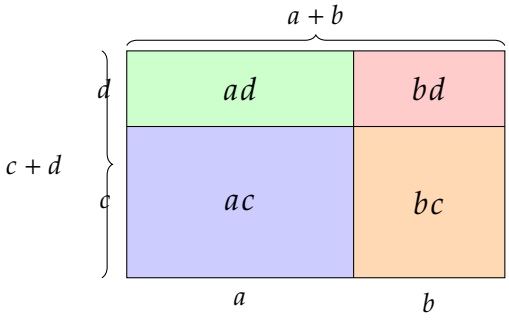
⑧ Double distributivité

Rappel : multiplier deux sommes entre elles

Lorsqu'on multiplie deux sommes, chaque terme de la première est multiplié par chaque terme de la seconde.

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Comme pour la distributivité simple, cette règle s'interprète par les aires : un rectangle de longueur $a + b$ et de largeur $c + d$ se découpe en quatre sous-rectangles d'aires ac, ad, bc et bd.



Exercice 14 *Développer un produit* Développer et réduire chacune des expressions suivantes.

a) $(x + 2)(x + 3)$
b) $(a + 5)(a - 4)$
c) $(2y + 1)(y + 7)$
d) $(3x - 2)(x + 1)$

Exercice 15 *Démasquer une erreur sur le carré* Un élève écrit : $(x + 3)^2 = x^2 + 9$.

a) Vérifier cette égalité par substitution avec $x = 1$, $x = 2$ et $x = -1$. Que constate-t-on ?
b) Donner le développement correct de $(x + 3)^2$.

9 Lettres et valeurs

Rappel : deux lettres différentes peuvent désigner le même nombre

Une croyance fréquente consiste à supposer que deux lettres distinctes désignent nécessairement des nombres différents. C'est faux : les lettres sont des étiquettes qu'on a choisies pour désigner des nombres, et rien n'interdit que deux étiquettes nomment le même nombre.
Si l'on écrit $a + b = 10$, les couples $(a\ ;\ b)$ qui conviennent sont multiples : $(0\ ;\ 10)$, $(3\ ;\ 7)$, $(5\ ;\ 5)$, $(-2\ ;\ 12)$, etc. Le couple $(5\ ;\ 5)$ est tout à fait acceptable : a et b valent tous deux 5, mais cela n'empêche pas de les avoir nommés différemment.
À l'inverse, deux occurrences de la **même lettre** dans une expression désignent toujours le même nombre. Dans $3x + 2x$, les deux x ont obligatoirement la même valeur.

Exercice 16 *Trouver des couples solutions*

a) Donner trois couples $(a\ ;\ b)$ d'entiers tels que $a + b = 8$. L'un de ces couples peut-il vérifier $a = b$?

b) Donner trois couples $(x\ ;\ y)$ tels que $x \times y = 12$. L'un de ces couples peut-il vérifier $x = y$?

c) Si $a + b = a + c$, peut-on en déduire que $b = c$? Justifier.

10 Pour s'auto-évaluer

Rappel : cinq questions à se poser

Avant de manipuler une expression algébrique, prendre l'habitude de se poser ces cinq questions.

- Que représente cette lettre ? Un nombre, et non un mot ou un objet.
- L'écriture $3a$ désigne-t-elle bien le produit $3 \times a$, et non la juxtaposition des chiffres ?
- Les termes que je veux regrouper sont-ils semblables (même partie littérale) ? Sinon, l'expression reste sous forme « ouverte ».
- Le signe = que j'utilise exprime-t-il une équivalence valable pour toute valeur, ou une équation à résoudre pour une valeur particulière ?
- Puis-je vérifier mon calcul par substitution, en remplaçant la lettre par une valeur simple $(0, 1, -1)$?

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

a) $5x$ désigne le produit $5 \times x$, c'est-à-dire 5 fois le nombre x.

b) $\frac{a}{2}$ désigne le quotient $a \div 2$, c'est-à-dire la moitié du nombre a.

c) $a + b$ désigne la somme du nombre a et du nombre b.

d) $2x + 3$ désigne le double du nombre x, augmenté de 3.

e) x^2 désigne le produit $x \times x$, c'est-à-dire le carré du nombre x.

f) $-3a$ désigne l'opposé du triple du nombre a, ou de manière équivalente $-3 \times a$.

Corrigé de l'exercice 2.

a) **Faux.** L'élève qui répond 31 traite $3a$ comme la juxtaposition des chiffres 3 et a (numération de position). Or $3a = 3 \times a = 3 \times 1 = 3$.

b) **Faux.** De même, $2a = 2 \times 5 = 10$, et non 25.

c) **Vrai.** $7x = 7 \times 0 = 0$. Tout produit par 0 vaut 0.

d) **Faux.** $b + b = 1 + 1 = 2$. Additionner deux 1 donne 2, pas 11.

Corrigé de l'exercice 3.

a) Léa traite la lettre p comme une étiquette désignant l'objet « crayon », alors que p désigne le **nombre** d'euros que coûte un crayon.

b) p représente un nombre (le prix d'un crayon, exprimé en euros). $5p$ représente 5 fois ce prix, c'est-à-dire le prix total de 5 crayons.

Corrigé de l'exercice 4.

a) $3 + 5 = 8$, et $? + 2 = 8$, donc $? = 6$.

b) $7 - 4 = 3$, donc $? = 2$.

c) $? = 3$.

d) $4 + 8 = 12$, donc $? = 3$.

e) Le nombre cherché est 5, deux fois.

f) $2 \times 5 = 10$, donc $? = 13$.

Corrigé de l'exercice 5.

a) **Vraie pour tout x.** C'est la distributivité : les deux expressions sont équivalentes.

b) **Vraie seulement pour $x = 7$.** C'est une équation, pas une égalité algébrique.

c) **Vraie pour tout x.** On a bien $x + x = 2x$ par définition de la multiplication.

d) **Vraie seulement pour $x = 3$.**

e) **Vraie pour tout x.** Tout produit par 0 vaut 0.

f) **Vraie pour aucune valeur de x.** Ajouter 1 donne nécessairement un nombre différent.

Corrigé de l'exercice 6.

a) $A = 3 \times 0 + 2 = 2$.

b) $A = 3 \times 1 + 2 = 5$.

c) $A = 3 \times 2 + 2 = 8$.

d) $A = 3 \times (-1) + 2 = -3 + 2 = -1$.

e) $A = 3 \times 5 + 2 = 17$.

f) $A = 3 \times \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{3}{2} + 2 = \dfrac{7}{2}$.

Corrigé de l'exercice 7.

a) Pour $x = 0$: gauche $= 2 \times 5 = 10$, droite $= 0 + 10 = 10$. Pour $x = 1$: gauche $= 2 \times 6 = 12$, droite $= 2 + 10 = 12$. L'égalité est cohérente sur ces deux valeurs (et l'on prouve qu'elle est vraie pour tout x par distributivité).

b) Pour $x = 0$: gauche $= 1$, droite $= 0 + 1 = 1$. Pour $x = 1$: gauche $= 4$, droite $= 1 + 1 = 2$. L'égalité est **fausse** (le contre-exemple $x = 1$ suffit).

c) Pour $x = 0$: gauche $= 0$, droite $= 0$. Pour $x = 1$: gauche $= 5$, droite $= 5$. Cohérent sur ces deux valeurs (l'égalité est vraie pour tout x).

d) Pour $x = 0$: gauche $= 0$, droite $= 4$. L'égalité est **fausse** dès $x = 0$. L'erreur consiste à confondre $4x - x$ avec $4 - 1 = 3$ ou 4, alors que $4x - x = 3x$.

e) Pour $x = 2$: gauche $= 1 + 1 = 2$, droite $= 2$. Pour $x = 4$: gauche $= 2 + 2 = 4$, droite $= 4$. Cohérent sur ces deux valeurs (l'égalité est vraie pour tout x).

Corrigé de l'exercice 8.

a) Avec 3 : $3 \to 8 \to 16 \to 6 \to 3$. Avec 7 : $7 \to 12 \to 24 \to 14 \to 7$. Avec -1 : $-1 \to 4 \to 8 \to -2 \to -1$. Le programme semble redonner le nombre de départ.

b) Conjecture : le programme rend le nombre choisi.

c) En partant de x : $x \to x + 5 \to 2(x + 5) = 2x + 10 \to 2x + 10 - 10 = 2x \to \dfrac{2x}{2} = x$. On retrouve bien x.

Corrigé de l'exercice 9.

a) $5 + 6 + 7 = 18 = 3 \times 6$.

b) $10 + 11 + 12 = 33 = 3 \times 11$.

c) $-2 + (-1) + 0 = -3 = 3 \times (-1)$.

d) Conjecture : la somme de trois nombres consécutifs est 3 fois le nombre du milieu.

e) Les trois consécutifs sont n, $n+1$, $n+2$. Leur somme vaut $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3(n+1)$. Or $n+1$ est le nombre du milieu, donc la somme est bien 3 fois le nombre du milieu.

Corrigé de l'exercice 10.

a) **Incorrect.** L'élève additionne $3x$ et 2, qui ne sont pas des termes semblables. L'expression $3x+2$ est déjà sous sa forme la plus simple : on ne peut pas la réduire davantage.

b) **Correct.** $4a$ et $2a$ sont semblables (même lettre, même puissance). $4a - 2a = 2a$.

c) **Incorrect.** L'élève a additionné les exposants alors qu'on additionne des termes semblables. Le bon calcul : $5y + 3y = 8y$ (et non $8y^2$).

d) **Correct.** On regroupe les termes semblables : $7x - 3x = 4x$, et le terme +2 reste seul. L'expression $4x+2$ est sous sa forme la plus simple.

Corrigé de l'exercice 11.

a) $5x + 3x = 8x$.

b) $4a + 7$ est déjà sous forme réduite (les deux termes ne sont pas semblables).

c) $6y - 2y + 3y = 7y$.

d) $2x - x + 5 + 1 = x + 6$.

e) $3a + 2b$ est déjà sous forme réduite (a et b ne sont pas la même lettre).

f) $8t - 5t - 3t = 0$.

Corrigé de l'exercice 12.

a) $3(x+4) = 3x + 12$.

b) $5(a-2) = 5a - 10$.

c) $2(3y+1) = 6y + 2$.

d) $-4(x+7) = -4x - 28$.

e) $-(2a+5) = -2a - 5$.

f) $\frac{1}{2}(6x-8) = 3x - 4$.

Corrigé de l'exercice 13.

a) $5x + 10 = 5(x+2)$.

b) $6a - 9 = 3(2a-3)$.

c) $4y + 12 = 4(y+3)$.

d) $14x - 7 = 7(2x-1)$.

e) $-3a + 6 = 3(-a+2)$, ou de manière équivalente $-3(a-2)$.

Corrigé de l'exercice 14.

a) $(x+2)(x+3) = x^2+3x+2x+6 = x^2+5x+6$.

b) $(a+5)(a-4) = a^2-4a+5a-20 = a^2+a-20$.

c) $(2y+1)(y+7) = 2y^2+14y+y+7 = 2y^2+15y+7$.

d) $(3x-2)(x+1) = 3x^2+3x-2x-2 = 3x^2+x-2$.

Corrigé de l'exercice 15.

a) Pour $x = 1$: gauche $= 4^2 = 16$, droite $= 1+9 = 10$. Pour $x = 2$: gauche $= 25$, droite $= 13$. Pour $x = -1$: gauche $= 4$, droite $= 10$. Les valeurs ne coïncident jamais : l'égalité est fausse.

b) Par double distributivité : $(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2+3x+3x+9 = x^2+6x+9$. Le terme $6x$, oublié par l'élève, est précisément ce qu'on appelle le **double produit**.

Corrigé de l'exercice 16.

a) Par exemple $(0\ ;\ 8)$, $(3\ ;\ 5)$, $(4\ ;\ 4)$. Le dernier vérifie bien $a = b = 4$.

b) Par exemple $(1\ ;\ 12)$, $(3\ ;\ 4)$, $(2\ ;\ 6)$. Pour avoir $x = y$, il faudrait $x^2 = 12$, donc $x = \sqrt{12}$ ou $x = -\sqrt{12}$, qui ne sont pas des entiers mais qui sont des nombres acceptables ; par exemple, le couple $(\sqrt{12}\ ;\ \sqrt{12})$ convient.

c) Oui, en soustrayant a aux deux membres, on obtient $b = c$. Le signe = étant une relation, on peut faire la même opération des deux côtés.