Équations différentielles

Jusqu'ici, une équation avait pour inconnue un nombre. Dans une **équation différentielle**, l'inconnue est une **fonction** y, et l'équation relie y à sa dérivée y'. C'est le langage naturel des sciences : une population qui croît proportionnellement à sa taille, un café qui refroidit d'autant plus vite qu'il est chaud, un médicament éliminé à un rythme proportionnel à la quantité présente. En terminale, on résout deux types d'équations : $y' = ay$, dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}$, et $y' = ay + b$, dont les solutions s'en déduisent en ajoutant la solution constante $-\dfrac{b}{a}$. Une **condition initiale** fixe la constante C et donne une solution unique. Les gestes à maîtriser sont peu nombreux mais précis : vérifier qu'une fonction est solution, mettre l'équation sous la forme $y' = ay + b$, écrire la solution générale, puis ajuster C.

Prérequis : Fonction exponentielle, Dérivation, Fonction logarithme. **Pour s'entraîner :** Exercices : équations différentielles.

Propriété 1 (Équation différentielle et solution, T^le)

Définition : une équation différentielle est une égalité entre une fonction inconnue y, sa dérivée y' et éventuellement la variable x. Exemples : $y' = 3y$, $y' = -2y + 6$, $y' = y + \mathrm{e}^x$.

Solution : une fonction f dérivable sur un intervalle I est solution si, pour tout x de I, l'égalité est vraie quand on remplace y par $f(x)$ et y' par $f'(x)$.

Résoudre : c'est trouver **toutes** les solutions. Il y en a en général une infinité, une seule si l'on impose une condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Méthode : vérifier qu'une fonction est solution

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer séparément le membre de droite en remplaçant y par $f(x)$.
3. Comparer : si les deux expressions sont égales pour tout x, f est solution.

Exemple. $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{2x}$ est-elle solution de $y' = 2y$? On a $f'(x) = 6\,\mathrm{e}^{2x}$ et $2f(x) = 6\,\mathrm{e}^{2x}$: oui. En revanche $g(x) = \mathrm{e}^{2x} + 1$ ne l'est pas : $g'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x}$ mais $2g(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} + 2$.

Exercice 1 *Vérifier qu'une fonction est solution, étape par étape* (T^{le})

1. Soit $g(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2$. Compléter : $g'(x) = \ldots$; $-g(x) + 2 = \ldots = \ldots$; donc g est solution de l'équation $y' = \ldots$
2. Vérifier que $h(x) = x\,\mathrm{e}^{x}$ est solution de $y' = y + \mathrm{e}^{x}$.
3. Vérifier que $k(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ est solution de $y' = 2x\,y$.
4. La fonction $m(x) = \mathrm{e}^{3x} + 1$ est-elle solution de $y' = 3y$? de $y' = 3y - 3$?

Propriété 2 (L'équation $y' = ay$, T^le)

Soit a un réel non nul.

Théorème : les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}$, où C est un réel quelconque.

Condition initiale : pour tous réels x_0 et y_0, il existe une **unique** solution vérifiant $y(x_0) = y_0$. En particulier, si $y(0) = y_0$, alors $\mathrm{C} = y_0$.

Lecture : $a > 0$ donne une croissance exponentielle ($\mathrm{C} > 0$), $a < 0$ une décroissance vers 0. La fonction nulle ($\mathrm{C} = 0$) est toujours solution.

Exemple. Les solutions de $y' = -3y$ sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-3x}$. Celle qui vérifie $y(0) = 4$ est $x \mapsto 4\,\mathrm{e}^{-3x}$. Pour $2y' + y = 0$, on écrit d'abord $y' = -\dfrac{1}{2}y$: solutions $x \mapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-x/2}$.

Exercice 2 *Résoudre* $y' = ay$ (T^{le})

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' = 3y$; $2y' + y = 0$; $y' - 5y = 0$.
2. Déterminer la solution de $y' = 3y$ telle que $y(0) = 4$.
3. Déterminer la solution de $2y' + y = 0$ telle que $y(2) = 1$.
4. Une population de bactéries a une vitesse de croissance proportionnelle à son effectif, avec un coefficient 0,4 par heure : $\mathrm{N}' = 0{,}4\,\mathrm{N}$. Il y a 500 bactéries à $t = 0$. Exprimer $\mathrm{N}(t)$ et calculer le temps de doublement.

Propriété 3 (L'équation $y' = ay + b$, Tle)

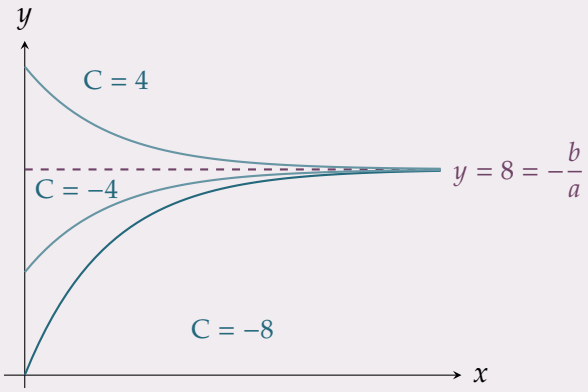
Soit a un réel non nul et b un réel.

Solution particulière : la fonction constante $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$ est solution (sa dérivée est nulle et $a \times \left(-\dfrac{b}{a}\right) + b = 0$). C'est la valeur d'équilibre.

Théorème : les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

Condition initiale : elle détermine C de manière unique. Attention : $y(0) = \mathrm{C} - \dfrac{b}{a}$, donc $\mathrm{C} = y(0) + \dfrac{b}{a}$.

Comportement : si $a < 0$, toutes les solutions tendent vers $-\dfrac{b}{a}$ en $+\infty$; si $a > 0$, elles s'en éloignent.



solutions de $y' = -0{,}5y + 4$: $y = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 8$

Méthode : résoudre $y' = ay + b$ avec une condition initiale

1. Mettre l'équation sous la forme $y' = ay + b$ et identifier a et b.
2. Écrire la solution constante $-\dfrac{b}{a}$ (résoudre $ay + b = 0$).
3. Écrire la solution générale $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$.
4. Utiliser la condition initiale pour calculer C, puis vérifier.

Exemple. $y' = 2y - 6$ avec $y(0) = 5$. Ici $a = 2$, $b = -6$, solution constante $-\dfrac{-6}{2} = 3$. Solution générale : $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{2x} + 3$. Condition initiale : $\mathrm{C} + 3 = 5$, donc $\mathrm{C} = 2$ et $y(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} + 3$. Vérification : $y'(x) = 4\,\mathrm{e}^{2x}$ et $2y(x) - 6 = 4\,\mathrm{e}^{2x} + 6 - 6 = 4\,\mathrm{e}^{2x}$. ✓

Exercice 3 *Résoudre $y' = ay + b$, étape par étape (T^{le})*

1. $y' = -3y + 6$ avec $y(0) = 0$. Compléter : $a = \ldots$, $b = \ldots$, solution constante $\ldots$; solution générale $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{\ldots x} + \ldots$; $y(0) = \mathrm{C} + \ldots = 0$ donc $\mathrm{C} = \ldots$ et $y(x) = \ldots$
2. Résoudre $3y' + y = 2$ avec $y(0) = 5$.
3. Résoudre $y' = 4y - 8$ avec $y(1) = 2$. Que remarque-t-on ?
4. Résoudre $y' = -y + 5$ avec $y(0) = 1$, puis déterminer la limite de la solution en $+\infty$.

Propriété 4 (Avec une solution particulière donnée : $y' = ay + f(x)$, T^le)

Soit φ une solution particulière de $y' = ay + f(x)$, où f est une fonction donnée.

Principe : y est solution de $y' = ay + f(x)$ si et seulement si $y - \varphi$ est solution de $y' = ay$.
Conséquence : les solutions sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax} + \varphi(x)$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$. L'équation $y' = ay + b$ en est le cas particulier où φ est la constante $-\dfrac{b}{a}$.

Exercice 4 *Solution générale à partir d'une solution particulière (T^{le})* On considère l'équation (E) : $y' = 2y + \mathrm{e}^{2x}$.

1. Vérifier que $\varphi(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$ est solution de (E).
2. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z = y - \varphi$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de $y' = 2y$.
3. En déduire toutes les solutions de (E).
4. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 3$.

Exercice 5 *Étude complète d'une solution (T^{le})* Soit f la solution de $y' = -0{,}5y + 4$ vérifiant $f(0) = 0$.

1. Déterminer l'expression de $f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement.
4. Résoudre $f(x) = 7{,}2$ et donner la valeur exacte puis arrondie au dixième.

Exercice 6 *Problème en contexte : refroidissement d'un café* (T^{le}) La température $T(t)$ d'un café (en degrés Celsius, t en minutes) dans une pièce à 20 °C vérifie la loi de Newton : la vitesse de refroidissement est proportionnelle à l'écart avec la température ambiante, soit $T' = -k(T - 20)$ avec $k > 0$. À $t = 0$ le café est à 80 °C ; après 5 minutes il est à 60 °C.

1. Écrire l'équation sous la forme $T' = aT + b$ et justifier que les solutions sont les fonctions $t \mapsto C\,e^{-kt} + 20$.
2. Déterminer C à l'aide de la température initiale.
3. Déterminer la valeur exacte de k, puis une valeur approchée à 10^{-3}.
4. Au bout de combien de temps le café atteint-il 40 °C ?
5. Quelle est la limite de $T(t)$ en $+\infty$? Interpréter.

Exercice 7 *Problème en contexte : un médicament en perfusion* (T^{le}) Un patient reçoit un médicament par perfusion continue au débit de 6 mg par heure. Simultanément, l'organisme élimine chaque heure 20 % de la quantité présente. On note $Q(t)$ la quantité de médicament dans le sang (en mg) à l'instant t (en heures), avec $Q(0) = 0$.

1. Justifier que Q vérifie $Q' = -0{,}2\,Q + 6$.
2. Déterminer $Q(t)$.
3. Déterminer la limite de Q en $+\infty$. Pourquoi cette valeur est-elle appelée quantité d'équilibre ?
4. Au bout de combien de temps la quantité atteint-elle 90 % de la quantité d'équilibre ?
5. On arrête la perfusion lorsque $Q = 27$ mg. Quelle équation différentielle vérifie alors Q ? Au bout de combien de temps la quantité aura-t-elle été divisée par deux ?

⚠ Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Oublier la constante C	« la solution de $y' = 3y$ est e^{3x} »	les solutions sont **toutes** les fonctions $C\,e^{3x}$
Se tromper de signe dans l'exposant	« $y' = -2y$ a pour solutions $C\,e^{2x}$ »	le coefficient $a = -2$ passe tel quel : $C\,e^{-2x}$
Prendre b comme solution particulière	« $y' = 2y + 6$: $C\,e^{2x} + 6$ »	la constante solution est $-\frac{b}{a} = -3$: $C\,e^{2x} - 3$
Identifier C à $y(0)$ malgré la constante	« $y = C\,e^{2x} + 3$ et $y(0) = 5$ donc $C = 5$ »	$y(0) = C + 3 = 5$ donne $C = 2$
Lire a et b sans isoler y'	« $2y' = y + 4$: $a = 1$, $b = 4$ »	d'abord $y' = \frac{1}{2}y + 2$: $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$

Exercice 8 *QCM (T^{le})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. Les solutions de $y' = -3y$ sont les fonctions :

   A. $x \mapsto C\,e^{3x}$ **B.** $x \mapsto C\,e^{-3x}$ **C.** $x \mapsto -3\,e^{x} + C$ **D.** $x \mapsto e^{-3x} + C$

2. La solution de $y' = 2y$ vérifiant $y(0) = 5$ est :

   A. $x \mapsto 5\,e^{2x}$ **B.** $x \mapsto 2\,e^{5x}$ **C.** $x \mapsto e^{2x} + 4$ **D.** $x \mapsto 5\,e^{2x} + 5$

3. Une solution constante de $y' = 4y - 8$ est :

   A. $y = 8$ **B.** $y = -2$ **C.** $y = 4$ **D.** $y = 2$

4. Si f est une solution de $y' = -2y + 6$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ vaut :

   A. 6 **B.** 0 **C.** 3 **D.** $+\infty$

Exercice 9 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. La fonction $x \mapsto e^{2x} + 1$ est solution de $y' = 2y$.

B. L'équation $y' = ay$ admet une infinité de solutions.

C. L'équation $y' = ay$ avec la condition $y(0) = y_0$ admet une unique solution.

D. La fonction nulle est solution de $y' = ay + b$ pour toutes valeurs de a et b.

E. Toutes les solutions de $y' = -y + 5$ tendent vers 5 en $+\infty$.

F. La solution de $y' = 3y + 6$ vérifiant $y(0) = 0$ est $x \mapsto 6\,e^{3x}$.

G. Si $y' = 2y$ et $y(0) = 0$, alors y est la fonction nulle.

H. Les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto C\,e^{ax} + b$.

*Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche **Que faire quand je bloque ?***
*Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche **Mémorisation et sciences cognitives**.*
*Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton **Carnet d'erreurs**.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$; $-g(x) + 2 = -\mathrm{e}^{-x} - 2 + 2 = -\mathrm{e}^{-x}$; donc g est solution de $y' = -y + 2$.
2. $h'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x} + x\,\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x} + x\,\mathrm{e}^{x}$ et $h(x) + \mathrm{e}^{x} = x\,\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x}$: égaux, h est solution.
3. $k'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$ (dérivée de e^{u} avec $u = x^2$) et $2x\,k(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$: k est solution.
4. $m'(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x}$. Or $3m(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x} + 3 \neq m'(x)$: m n'est pas solution de $y' = 3y$. Mais $3m(x) - 3 = 3\,\mathrm{e}^{3x} = m'(x)$: m est solution de $y' = 3y - 3$.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $y' = 3y : x \mapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{3x}$. $2y' + y = 0 \iff y' = -\dfrac{1}{2}y : x \mapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-x/2}$. $y' - 5y = 0 \iff y' = 5y : x \mapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{5x}$. Dans les trois cas, C décrit $\mathbb{R}$.
2. $y(0) = \mathrm{C} = 4 : y(x) = 4\,\mathrm{e}^{3x}$.
3. $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-x/2}$ et $y(2) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-1} = 1$, donc $\mathrm{C} = \mathrm{e}$ et $y(x) = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-x/2} = \mathrm{e}^{1-x/2}$.
4. $\mathrm{N}(t) = 500\,\mathrm{e}^{0{,}4t}$. Doublement : $500\,\mathrm{e}^{0{,}4t} = 1000 \iff \mathrm{e}^{0{,}4t} = 2 \iff t = \dfrac{\ln 2}{0{,}4} \approx 1{,}73$ h, soit environ 1 h 44 min.

Corrigé de l'exercice 3.

1. $a = -3$, $b = 6$, solution constante $-\dfrac{6}{-3} = 2$; $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-3x} + 2$; $y(0) = \mathrm{C} + 2 = 0$ donc $\mathrm{C} = -2$ et $y(x) = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-3x}$.
2. $3y' + y = 2 \iff y' = -\dfrac{1}{3}y + \dfrac{2}{3} : a = -\dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{2}{3}$, solution constante $-\dfrac{2/3}{-1/3} = 2$. $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-x/3} + 2$; $y(0) = \mathrm{C} + 2 = 5$, $\mathrm{C} = 3 : y(x) = 3\,\mathrm{e}^{-x/3} + 2$.
3. Solution constante $-\dfrac{-8}{4} = 2$, $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{4x} + 2$; $y(1) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{4} + 2 = 2$ donne $\mathrm{C} = 0$: la solution est la fonction constante $y = 2$. Quand la condition initiale coïncide avec la valeur d'équilibre, la solution reste à l'équilibre.
4. Solution constante 5, $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-x} + 5$; $\mathrm{C} + 5 = 1$, $\mathrm{C} = -4 : y(x) = 5 - 4\,\mathrm{e}^{-x}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 5$: la solution tend vers la valeur d'équilibre.

Corrigé de l'exercice 4.

1. $\varphi'(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2x\,\mathrm{e}^{2x}$ et $2\varphi(x) + \mathrm{e}^{2x} = 2x\,\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x}$: égaux, φ est solution.
2. $z' = y' - \varphi'$. Si y est solution de (E) : $z' = (2y + \mathrm{e}^{2x}) - (2\varphi + \mathrm{e}^{2x}) = 2(y - \varphi) = 2z$. Réciproquement, si $z' = 2z : y' = z' + \varphi' = 2z + 2\varphi + \mathrm{e}^{2x} = 2y + \mathrm{e}^{2x}$, donc y est solution de (E).
3. Les solutions de $z' = 2z$ sont $z(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{2x}$, donc celles de (E) sont $y(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{2x} + x\,\mathrm{e}^{2x} = (\mathrm{C} + x)\,\mathrm{e}^{2x}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.
4. $y(0) = \mathrm{C} = 3 : y(x) = (3 + x)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Corrigé de l'exercice 5.

1. Solution constante $-\dfrac{4}{-0{,}5} = 8$; $f(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 8$ avec $\mathrm{C} + 8 = 0$: $f(x) = 8 - 8\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$.
2. $f'(x) = 4\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (On retrouve $f' = -0{,}5f + 4 = -4 + 4\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 4$. ✓)
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}5x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 8$: la courbe admet la droite $y = 8$ pour asymptote horizontale, et reste en dessous puisque $f(x) < 8$.
4. $8 - 8\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} = 7{,}2 \iff \mathrm{e}^{-0{,}5x} = 0{,}1 \iff -0{,}5x = \ln 0{,}1 \iff x = 2\ln 10 \approx 4{,}6$.

Corrigé de l'exercice 6.

1. $\mathrm{T}' = -k\mathrm{T} + 20k$: $a = -k$, $b = 20k$, solution constante $-\dfrac{20k}{-k} = 20$. Solutions : $\mathrm{T}(t) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-kt} + 20$.
2. $\mathrm{T}(0) = \mathrm{C} + 20 = 80$, donc $\mathrm{C} = 60$ et $\mathrm{T}(t) = 60\,\mathrm{e}^{-kt} + 20$.
3. $\mathrm{T}(5) = 60\,\mathrm{e}^{-5k} + 20 = 60 \iff \mathrm{e}^{-5k} = \dfrac{2}{3} \iff k = -\dfrac{1}{5}\ln\dfrac{2}{3} = \dfrac{\ln 1{,}5}{5} \approx 0{,}081$.
4. $60\,\mathrm{e}^{-kt} + 20 = 40 \iff \mathrm{e}^{-kt} = \dfrac{1}{3} \iff t = \dfrac{\ln 3}{k} = \dfrac{5\ln 3}{\ln 1{,}5} \approx 13{,}5$ min.
5. $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{T}(t) = 20$: le café tend vers la température de la pièce sans jamais l'atteindre. Le refroidissement est rapide au début (grand écart) puis ralentit.

Corrigé de l'exercice 7.

1. La variation par heure est l'apport (+6) moins l'élimination (20 % de Q, soit 0,2Q) : $\mathrm{Q}' = 6 - 0{,}2\mathrm{Q}$.
2. $a = -0{,}2$, $b = 6$, solution constante $\dfrac{6}{0{,}2} = 30$. $\mathrm{Q}(t) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} + 30$ avec $\mathrm{C} + 30 = 0$: $\mathrm{Q}(t) = 30 - 30\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$.
3. $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{Q}(t) = 30$ mg. À ce niveau, l'élimination ($0{,}2\times 30 = 6$ mg/h) compense exactement l'apport (6 mg/h) : la quantité ne varie plus.
4. $30 - 30\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 27 \iff \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0{,}1 \iff t = 5\ln 10 \approx 11{,}5$ h.
5. Sans apport, $\mathrm{Q}' = -0{,}2\mathrm{Q}$: en notant t_0 l'instant d'arrêt, $\mathrm{Q}(t) = 27\,\mathrm{e}^{-0{,}2(t-t_0)}$. Division par deux : $\mathrm{e}^{-0{,}2\tau} = \dfrac{1}{2} \iff \tau = \dfrac{\ln 2}{0{,}2} = 5\ln 2 \approx 3{,}5$ h.

Corrigé de l'exercice 8.

1. **Réponse B.** Pour $y' = ay$, les solutions sont $\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax}$ avec ici $a = -3$.
   - A : erreur de signe dans l'exposant.
   - C : la dérivée de $-3\,\mathrm{e}^{x} + \mathrm{C}$ est $-3\,\mathrm{e}^{x}$, qui n'est pas -3 fois la fonction.

- D : la constante doit multiplier l'exponentielle, pas s'ajouter ; $e^{-3x} + C$ n'est solution que si $C = 0$.

2. **Réponse A.** Solutions $C\,e^{2x}$ et $y(0) = C = 5$.
   - B : les rôles de a et de $y(0)$ sont échangés.
   - C : $y(0) = 5$ est bien vérifié, mais $y' = 2\,e^{2x}$ alors que $2y = 2\,e^{2x} + 8$: pas solution.
   - D : $y(0) = 10$, et la fonction n'est pas solution de $y' = 2y$.
3. **Réponse D.** On résout $4y - 8 = 0$: $y = 2$.
   - A : c'est $-b$, pas $-\dfrac{b}{a}$.
   - B : erreur de signe : $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-8}{4} = 2$.
   - C : c'est le coefficient a, sans rapport.
4. **Réponse C.** Les solutions sont $C\,e^{-2x} + 3$ et $e^{-2x} \to 0$: toutes tendent vers 3.
   - A : 6 est b, pas la valeur d'équilibre $-\dfrac{b}{a}$.
   - B : la partie exponentielle tend vers 0, mais il reste la constante 3.
   - D : avec $a = -2 < 0$, l'exponentielle décroît vers 0, pas d'explosion.

Corrigé de l'exercice 9.

A. Faux. Sa dérivée est $2\,e^{2x}$ alors que $2y = 2\,e^{2x} + 2$. On ne peut pas ajouter une constante à une solution de $y' = ay$.

B. Vrai. Une pour chaque valeur du réel C dans $C\,e^{ax}$.

C. Vrai. La condition initiale impose $C = y_0$.

D. Faux. Pour la fonction nulle, $y' = 0$ et $ay + b = b$: elle n'est solution que si $b = 0$.

E. Vrai. Les solutions sont $C\,e^{-x} + 5$ et $e^{-x} \to 0$ en $+\infty$.

F. Faux. Solution constante -2, solutions $C\,e^{3x} - 2$, et $y(0) = 0$ donne $C = 2$: la solution est $2\,e^{3x} - 2$. D'ailleurs $6\,e^{3x}$ ne vaut pas 0 en 0.

G. Vrai. $y = C\,e^{2x}$ avec $C = y(0) = 0$.

H. Faux. La solution constante est $-\dfrac{b}{a}$, pas b : les solutions sont $C\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$.