Équations différentielles
— Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur les équations différentielles. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver la méthode de vérification, les solutions de $y' = ay$ et de $y' = ay + b$, et le rôle de la condition initiale. Commence toujours par mettre l'équation sous la forme $y' = ay + b$, écris la solution constante $-\frac{b}{a}$, puis la solution générale, et termine par la constante C.

Exercice 1 ***Vérifier qu'une fonction est solution, étape par étape*** **(T^{le}).**

1. Soit $g(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2$. Compléter : $g'(x) =$ ..... ; $-g(x) + 2 =$ ..... = ... ; donc g est solution de l'équation $y' =$ .....
2. Vérifier que $h(x) = x\,\mathrm{e}^{x}$ est solution de $y' = y + \mathrm{e}^{x}$.

3. Vérifier que $k(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ est solution de $y' = 2x\,y$.

4. La fonction $m(x) = \mathrm{e}^{3x} + 1$ est-elle solution de $y' = 3y$? de $y' = 3y - 3$?

Exercice 2 ***Résoudre*** $y' = ay$ **(T^{le}).**

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ chaque équation.

   a) $y' = 3y$: ..... b) $2y'+y = 0$: ..... c) $y'-5y = 0$: .....

2. Déterminer la solution de $y' = 3y$ telle que $y(0) = 4$.

   .....

   .....

3. Déterminer la solution de $2y' + y = 0$ telle que $y(2) = 1$.

4. Une population de bactéries a une vitesse de croissance proportionnelle à son effectif, avec un coefficient 0,4 par heure : $N' = 0{,}4\,N$. Il y a 500 bactéries à $t = 0$. Exprimer $N(t)$ et calculer le temps de doublement.

Exercice 3 ***Résoudre $y' = ay + b$, étape par étape*** **(T^{le}).**

1. $y' = -3y + 6$ avec $y(0) = 0$. Compléter : $a =$ ..... , $b =$ ..... , solution constante ..... ; solution générale $y(x) = C\,e^{\cdots\cdots x} +$ ..... ; $y(0) = C +$ ..... $= 0$ donc C = ... et $y(x) =$ .....
2. Résoudre $3y' + y = 2$ avec $y(0) = 5$.
3. Résoudre $y' = 4y - 8$ avec $y(1) = 2$. Que remarque-t-on ?
4. Résoudre $y' = -y + 5$ avec $y(0) = 1$, puis déterminer la limite de la solution en $+\infty$.

Exercice 4 ***Solution générale à partir d'une solution particulière*** **(*T^le*).** On considère l'équation (E) : $y' = 2y + e^{2x}$.

1. Vérifier que $\varphi(x) = x\,e^{2x}$ est solution de (E).

2. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z = y - \varphi$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de $y' = 2y$.

3. En déduire toutes les solutions de (E).

4. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 3$.

Exercice 5 ***Étude complète d'une solution*** **(*T^le*).** Soit f la solution de $y' = -0{,}5y + 4$ vérifiant $f(0) = 0$.

1. Déterminer l'expression de $f(x)$.

2. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement.

4. Résoudre $f(x) = 7{,}2$ et donner la valeur exacte puis arrondie au dixième.

Exercice 6 ***Problème en contexte : refroidissement d'un café*** **(T^{le}).** La température $\mathrm{T}(t)$ d'un café (en degrés Celsius, t en minutes) dans une pièce à 20 °C vérifie la loi de Newton : la vitesse de refroidissement est proportionnelle à l'écart avec la température ambiante, soit $\mathrm{T}' = -k\,(\mathrm{T} - 20)$ avec $k > 0$. À $t = 0$ le café est à 80 °C ; après 5 minutes il est à 60 °C.

1. Écrire l'équation sous la forme $\mathrm{T}' = a\mathrm{T} + b$ et justifier que les solutions sont les fonctions $t \mapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-kt} + 20$.

2. Déterminer C à l'aide de la température initiale.

   .....

   .....

3. Déterminer la valeur exacte de k, puis une valeur approchée à 10^{-3}.

4. Au bout de combien de temps le café atteint-il 40 °C ?

5. Quelle est la limite de $T(t)$ en $+\infty$? Interpréter.

   .....

   .....

Exercice 7 ***Problème en contexte : un médicament en perfusion*** (T^{le})**.** Un patient reçoit un médicament par perfusion continue au débit de 6 mg par heure. Simultanément, l'organisme élimine chaque heure 20 % de la quantité présente. On note $Q(t)$ la quantité de médicament dans le sang (en mg) à l'instant t (en heures), avec $Q(0) = 0$.

1. Justifier que Q vérifie $Q' = -0{,}2\,Q + 6$.

   .....

   .....

2. Déterminer $Q(t)$.

3. Déterminer la limite de Q en $+\infty$. Pourquoi cette valeur est-elle appelée quantité d'équilibre ?

4. Au bout de combien de temps la quantité atteint-elle 90 % de la quantité d'équilibre ?

5. On arrête la perfusion lorsque Q = 27 mg. Quelle équation différentielle vérifie alors Q ? Au bout de combien de temps la quantité aura-t-elle été divisée par deux ?

Exercice 8 *QCM* (T^{le})**.** Pour chaque question, entourer la seule réponse correcte, puis justifier en une phrase.

1. Les solutions de $y' = -3y$ sont les fonctions :

   A. $x \mapsto C\,e^{3x}$ **B.** $x \mapsto C\,e^{-3x}$ **C.** $x \mapsto -3\,e^{x} + C$ **D.** $x \mapsto e^{-3x} + C$

   .....

2. La solution de $y' = 2y$ vérifiant $y(0) = 5$ est :

   A. $x \mapsto 5\,e^{2x}$ **B.** $x \mapsto 2\,e^{5x}$ **C.** $x \mapsto e^{2x} + 4$ **D.** $x \mapsto 5\,e^{2x} + 5$

   .....

3. Une solution constante de $y' = 4y - 8$ est :

   A. $y = 8$ **B.** $y = -2$ **C.** $y = 4$ **D.** $y = 2$

   .....

4. Si f est une solution de $y' = -2y + 6$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ vaut :

   A. 6 **B.** 0 **C.** 3 **D.** $+\infty$

   .....

Exercice 9 ***Vrai ou faux ?.*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. La fonction $x \mapsto e^{2x} + 1$ est solution de $y' = 2y$.

B. L'équation $y' = ay$ admet une infinité de solutions.

C. L'équation $y' = ay$ avec la condition $y(0) = y_0$ admet une unique solution.

D. La fonction nulle est solution de $y' = ay + b$ pour toutes valeurs de a et b.

E. Toutes les solutions de $y' = -y + 5$ tendent vers 5 en $+\infty$.

F. La solution de $y' = 3y + 6$ vérifiant $y(0) = 0$ est $x \mapsto 6\,e^{3x}$.

G. Si $y' = 2y$ et $y(0) = 0$, alors y est la fonction nulle.

H. Les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{ax} + b$.