Droites et plans de l'espace

Dans le plan, une droite se décrit par une équation. Dans l'espace, une équation du type $ax + by + cz + d = 0$ décrit un **plan**, et une droite se décrit autrement : par un point et un vecteur directeur, sous forme de **représentation paramétrique**. Un plan, lui, se caractérise très efficacement par un point et un **vecteur normal**, c'est-à-dire un vecteur orthogonal au plan : c'est le produit scalaire qui fait le lien entre ce vecteur et l'équation cartésienne. Avec ces deux outils, on sait répondre aux questions classiques : un point est-il sur une droite ? Une droite traverse-t-elle un plan, et où ? Deux plans sont-ils parallèles ? Quel est le point d'un plan le plus proche d'un point donné ? Toute la difficulté tient à ne pas confondre les rôles : vecteur directeur pour une droite, vecteur normal pour un plan, et un seul paramètre t commun aux trois coordonnées.

Prérequis : Géométrie dans l'espace, Produit scalaire. **Pour s'entraîner :** Exercices : droites et plans de l'espace.

Propriété 1 (Représentation paramétrique d'une droite, T^le)

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\ ;\ y_\mathrm{A}\ ;\ z_\mathrm{A})$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (non nul).

Définition : $\mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\,\vec{u}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = x_\mathrm{A} + a\,t \\ y = y_\mathrm{A} + b\,t \\ z = z_\mathrm{A} + c\,t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Lecture : chaque valeur de t donne un point de la droite ; les coefficients de t forment un vecteur directeur, les constantes un point.

Non unicité : une droite a une infinité de représentations paramétriques (autre point, autre vecteur directeur colinéaire).

Appartenance : M est sur $\mathcal{D}$ si un **même** t vérifie les trois équations.

Exemple. Droite $\mathcal{D}$ passant par $\mathrm{A}(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$: $x = 1+2t$, $y = 2-t$, $z = -1+3t$. Le point $\mathrm{B}(5\ ;\ 0\ ;\ 5)$ est-il sur $\mathcal{D}$? La première équation donne $t = 2$; alors $y = 2-2 = 0$ et $z = -1+6 = 5$: oui. Le point $\mathrm{C}(3\ ;\ 1\ ;\ 1)$? On trouve $t = 1$, puis $y = 1$ mais $z = 2 \neq 1$: non.

Exercice 1 *Lire et écrire une représentation paramétrique (T^{le})*

1. La droite $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique $x = 2 - t$, $y = 3t$, $z = 1 + 2t$. Donner un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, puis les coordonnées du point de paramètre $t = -1$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) avec A(1 ; 0 ; 2) et B(3 ; −1 ; 4).
3. Les points M(4 ; −6 ; −3) et N(0 ; 6 ; 4) appartiennent-ils à la droite $\mathcal{D}$ de la question 1 ?
4. Les représentations $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 3 - t$ et $x = 3 - 2s$, $y = 4 - 4s$, $z = 1 + 2s$ décrivent-elles la même droite ?

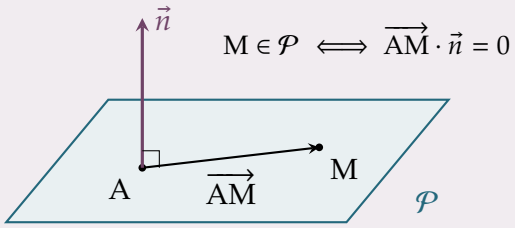
Propriété 2 (Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan, T^{le})

Vecteur normal : un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal au plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$. Il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

Caractérisation : si $\mathcal{P}$ passe par A et a pour vecteur normal $\vec{n}$, alors $M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Équation cartésienne : avec $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, cette condition s'écrit $ax + by + cz + d = 0$, où $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$.

Réciproque : toute équation $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a\ ;\ b\ ;\ c) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ est celle d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Les coefficients de x, y, z se lisent directement.



Méthode : équation d'un plan à partir d'un point et d'un vecteur normal

1. Recopier les coordonnées de $\vec{n}$ comme coefficients : $ax + by + cz + d = 0$.
2. Remplacer x, y, z par les coordonnées du point A pour trouver d.
3. Vérifier que A satisfait l'équation obtenue.

Si le plan est donné par trois points A, B, C non alignés, on cherche d'abord $\vec{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en résolvant $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (on fixe une coordonnée, par exemple $c = 1$, quand c'est possible).

Exemple. Plan $\mathcal{P}$ passant par A(1 ; −2 ; 3) de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$: on écrit $2x+y-z+d=0$, puis $2\times1+(-2)-3+d=0$ donne $d=3$. Ainsi $\mathcal{P}: 2x+y-z+3=0$. Vérification : $2-2-3+3=0$. ✓

Exercice 2 *Équation cartésienne d'un plan, étape par étape (T^le)*

1. Le plan $\mathcal{P}$ passe par A(0 ; 1 ; 2) et a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$. Compléter : $\mathcal{P}$: $x-y+\ldots z+d=0$; avec A : $0-1+\ldots+d=0$, donc $d=\ldots$ et $\mathcal{P}:\ldots$
2. Donner un vecteur normal du plan $\mathcal{Q}: 3x-y+2z-5=0$. Les points E(1 ; 0 ; 1) et F(2 ; 3 ; 1) appartiennent-ils à $\mathcal{Q}$?
3. Soit A(1 ; 1 ; 0), B(0 ; 2 ; 1) et C(2 ; 0 ; 3). Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires, déterminer un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ orthogonal aux deux, puis une équation du plan (ABC).

Propriété 3 (Positions relatives, T^le)

Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ des plans de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

Droite et plan : $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ (elle est alors incluse dans $\mathcal{P}$ ou strictement parallèle : tester un point). Sinon, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants en un point unique. $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Deux plans : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires (confondus ou strictement parallèles : tester un point). Sinon, ils sont sécants selon une droite.

Deux droites : elles sont coplanaires (sécantes ou parallèles) ou non coplanaires. Vecteurs directeurs colinéaires : parallèles. Sinon, on cherche un point commun : s'il existe elles sont sécantes, sinon non coplanaires.

Méthode : intersection d'une droite et d'un plan

1. Remplacer x, y, z dans l'équation du plan par leurs expressions en fonction de t.
2. Résoudre l'équation en t obtenue : une solution (sécants), aucune (strictement parallèles) ou une infinité (droite incluse).
3. Reporter la valeur de t dans la représentation paramétrique pour obtenir le point d'intersection, et vérifier qu'il satisfait l'équation du plan.

Exemple. $\mathcal{D} : x = 1+t,\ y = 2-t,\ z = 3+2t$ et $\mathcal{P} : x+2y-z+1 = 0$. On remplace : $(1+t)+2(2-t)-(3+2t)+1 = 3-3t$. Donc $3-3t = 0$, $t = 1$, et le point d'intersection est I(2 ; 1 ; 5). Vérification : $2+2-5+1 = 0$. ✓

Exercice 3 *Intersection d'une droite et d'un plan (T^le)* On considère le plan $\mathcal{P} : 2x - y + z - 4 = 0$.

1. Soit $\mathcal{D} : x = 2+t, y = -1+3t, z = 1-t$. Compléter : $2(2+t)-(-1+3t)+(1-t)-4 = \ldots - \ldots t$, donc $t = \ldots$ et $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{\text{I}\}$ avec I$(\ldots\ ;\ \ldots\ ;\ \ldots)$. Vérifier que I $\in \mathcal{P}$.
2. Soit $\mathcal{D}' : x = 1+t, y = 1+t, z = 2-t$. Calculer $\vec{u}' \cdot \vec{n}$ et conclure sur la position de $\mathcal{D}'$ par rapport à $\mathcal{P}$. Préciser si $\mathcal{D}'$ est incluse dans $\mathcal{P}$.
3. Soit $\mathcal{D}'' : x = 2t, y = 3-t, z = t$. Montrer que $\mathcal{D}''$ est orthogonale à $\mathcal{P}$ et déterminer leur point d'intersection.

Exercice 4 *Positions relatives de plans et de droites (T^le)*

1. On donne $\mathcal{P}_1 : x-2y+z-1 = 0$, $\mathcal{P}_2 : -2x+4y-2z+5 = 0$ et $\mathcal{P}_3 : x+y+z = 0$. Étudier la position relative de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, puis de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ (on pourra poser $z = t$).
3. Les droites $\mathcal{D}_1 : x = 1+t, y = 2t, z = 3-t$ et $\mathcal{D}_2 : x = 2+s, y = 1-s, z = 4+2s$ sont-elles parallèles ? sécantes ? non coplanaires ?

Propriété 4 (Projeté orthogonal et distance, T^le)

Sur un plan : le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est le point H de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{\text{MH}}$ soit colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$. C'est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M : la distance de M à $\mathcal{P}$ est MH.

Sur une droite : le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ est le point H de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{\text{MH}} \cdot \vec{u} = 0$. C'est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de M.

Méthode : projeté orthogonal d'un point sur un plan

1. Écrire la représentation paramétrique de la droite Δ passant par M et de vecteur directeur $\vec{n}$.
2. Déterminer l'intersection H de Δ et de $\mathcal{P}$ (méthode précédente).
3. Calculer MH si l'on veut la distance de M au plan.

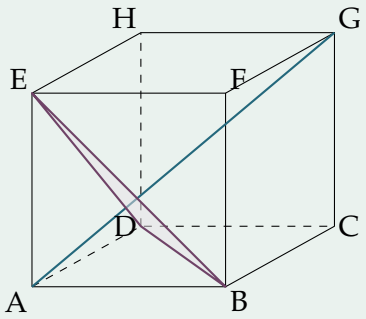
Pour un projeté sur une droite : écrire H en fonction du paramètre t, puis résoudre $\overrightarrow{\text{MH}} \cdot \vec{u} = 0$.

Exemple. M(3 ; 1 ; 2) et $\mathcal{P} : x + 2y - 2z + 1 = 0$, de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$. $\Delta : x = 3 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 2 - 2t$. Dans $\mathcal{P}$: $(3 + t) + 2(1 + 2t) - 2(2 - 2t) + 1 = 2 + 9t = 0$, donc $t = -\frac{2}{9}$ et $\mathrm{H}\left(\frac{25}{9} ; \frac{5}{9} ; \frac{22}{9}\right)$. Distance : $\mathrm{MH} = |t| \times \|\vec{n}\| = \frac{2}{9} \times 3 = \frac{2}{3}$.

Exercice 5 *Projeté orthogonal et distance (T^{le})*

1. Déterminer le projeté orthogonal H de M(1 ; 2 ; 3) sur le plan $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 3 = 0$, puis la distance de M à $\mathcal{P}$.
2. Déterminer le projeté orthogonal K de A(2 ; 3 ; 1) sur la droite $\mathcal{D} : x = t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$, puis la distance de A à $\mathcal{D}$.
3. Pourquoi H est-il le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M ? (On pourra considérer un autre point N de $\mathcal{P}$ et le triangle MHN.)

Exercice 6 *Problème en contexte : la grande diagonale du cube (T^{le})* ABCDEFGH est un cube d'arête 1. On se place dans le repère orthonormé $(\mathrm{A} ; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$.



1. Donner les coordonnées des points B, D, E et G.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (BDE) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.
3. Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE), puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.
4. Calculer la distance du point A au plan (BDE).
5. En déduire le volume du tétraèdre ABDE sachant que le triangle BDE est équilatéral de côté $\sqrt{2}$ (aire $\frac{\sqrt{3}}{2}$). Retrouver ce volume par une autre méthode.

Exercice 7 *Problème en contexte : un rayon de soleil sur un panneau (T^le)* Dans un repère orthonormé (unité : le mètre), un panneau solaire est le parallélogramme ABCD avec A(0 ; 0 ; 2), B(4 ; 0 ; 2) et D(0 ; 3 ; 4). Un rayon de soleil suit la droite $\mathcal{R}$ passant par S(1 ; 4 ; 7) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABD) et qu'une équation de ce plan est $2y - 3z + 6 = 0$.
2. Le rayon est-il parallèle au panneau ? Est-il orthogonal au panneau ?
3. Déterminer les coordonnées du point I où le rayon rencontre le plan (ABD).
4. Le point I appartient au panneau si $\overrightarrow{AI} = \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AD}$ avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ et $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Le rayon touche-t-il effectivement le panneau ?

Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Confondre vecteur directeur et vecteur normal	« $x + 2y - z + 1 = 0$ a pour vecteur directeur $(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ »	c'est un vecteur **normal** ; un plan n'a pas de vecteur directeur unique
Croire qu'une droite a une équation cartésienne	« $\mathcal{D} : 2x - y + 3 = 0$ »	dans l'espace, cette équation décrit un plan ; une droite se donne par une représentation paramétrique
Tester l'appartenance avec des t différents	« x donne $t = 2$, y donne $t = 1$, donc $M \in \mathcal{D}$ »	le paramètre doit être le **même** pour les trois coordonnées : ici $M \notin \mathcal{D}$
Oublier la constante d	« vecteur normal $(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ donc $x + 2y + 3z = 0$ »	il faut utiliser un point du plan pour calculer d
Conclure « incluse » dès que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$	« $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donc $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ »	parallèle seulement ; tester un point pour distinguer incluse et strictement parallèle

Exercice 8 *QCM (T^{le})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. Un vecteur normal au plan d'équation $3x - y + 2z - 7 = 0$ est :

   A. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$ **B.** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **C.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ **D.** $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. La droite de représentation paramétrique $x = 1 + 2t$, $y = -t$, $z = 3$ passe par le point :

   A. $(3\ ;\ -1\ ;\ 3)$ **B.** $(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ **C.** $(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$ **D.** $(1\ ;\ -1\ ;\ 3)$

3. La droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et le plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont tels que :

   A. $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$

   B. $\mathcal{D}$ est sécante à $\mathcal{P}$ sans lui être orthogonale

   C. $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ (incluse ou strictement parallèle)

   D. $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$

4. La distance du point M$(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ au plan d'équation $z = 4$ vaut :

   A. 4 **B.** 3 **C.** 1 **D.** $\sqrt{3}$

Exercice 9 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Une droite de l'espace admet une unique représentation paramétrique.

B. Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, où $\vec{u}$ dirige $\mathcal{D}$ et $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

C. Deux plans dont les vecteurs normaux sont colinéaires sont parallèles.

D. Dans l'espace, l'équation $x + y - 3 = 0$ définit une droite.

E. Le projeté orthogonal H de M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.

F. Deux droites de l'espace qui ne sont pas parallèles sont sécantes.

G. Un plan admet une infinité de vecteurs normaux, tous colinéaires entre eux.

H. Le plan d'équation $2x - 3y + z = 0$ passe par l'origine du repère.

*Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche **Que faire quand je bloque ?***
*Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche **Mémorisation et sciences cognitives**.*

Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton ***Carnet d'erreurs****.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. Point A(2 ; 0 ; 1) (obtenu pour $t = 0$) et vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$. Pour $t = -1$: (3 ; −3 ; −1).
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, d'où $x = 1 + 2t$, $y = -t$, $z = 2 + 2t$ (on peut aussi partir de B).
3. Pour M : $2 - t = 4$ donne $t = -2$; alors $y = -6$ ✓ et $z = 1 - 4 = -3$ ✓ : M $\in \mathcal{D}$. Pour N : $t = 2$, puis $y = 6$ ✓ mais $z = 5 \neq 4$: N $\notin \mathcal{D}$.
4. Vecteurs directeurs $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}$: colinéaires (le second vaut −2 fois le premier), donc droites parallèles. Le point (3 ; 4 ; 1) de la seconde ($s = 0$) est-il sur la première ? $1 + t = 3$ donne $t = 2$, puis $y = 4$ ✓ et $z = 1$ ✓. Les deux droites sont parallèles et ont un point commun : c'est la même droite.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $\mathcal{P} : x - y + 2z + d = 0$; avec A : $0 - 1 + 4 + d = 0$, donc $d = -3$ et $\mathcal{P} : x - y + 2z - 3 = 0$.
2. $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$. Pour E : $3 - 0 + 2 - 5 = 0$, donc E $\in \mathcal{Q}$. Pour F : $6 - 3 + 2 - 5 = 0$, donc F $\in \mathcal{Q}$ aussi.
3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$: non colinéaires (les deux premières coordonnées sont opposées, pas la troisième). On résout $-a + b + c = 0$ et $a - b + 3c = 0$: en ajoutant, $4c = 0$ donc $c = 0$, puis $a = b$. On prend $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Équation : $x + y + d = 0$; avec A : $1 + 1 + d = 0$, $d = -2$. Donc (ABC) : $x + y - 2 = 0$. Vérification : B : $0 + 2 - 2 = 0$ ✓ ; C : $2 + 0 - 2 = 0$ ✓.

Corrigé de l'exercice 3.

1. $4 + 2t + 1 - 3t + 1 - t - 4 = 2 - 2t$, donc $t = 1$ et I(3 ; 2 ; 0). Vérification : $6 - 2 + 0 - 4 = 0$. ✓
2. $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$: $\vec{u'} \cdot \vec{n} = 2 - 1 - 1 = 0$, donc $\mathcal{D}'$ est parallèle à $\mathcal{P}$. Le point (1 ; 1 ; 2) de $\mathcal{D}'$ donne $2 - 1 + 2 - 4 = -1 \neq 0$: il n'est pas dans $\mathcal{P}$. $\mathcal{D}'$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$ (aucun point commun).

3. $\vec{u}''\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \vec{n}$: vecteur directeur colinéaire au vecteur normal, donc $\mathcal{D}''$ orthogonale à $\mathcal{P}$. Intersection : $4t-3+t+t-4 = 6t-7 = 0$, $t = \frac{7}{6}$, point $\left(\frac{7}{3}\ ;\ \frac{11}{6}\ ;\ \frac{7}{6}\right)$. Vérification : $\frac{14}{3} - \frac{11}{6} + \frac{7}{6} - 4 = \frac{28-11+7-24}{6} = 0$. ✓

Corrigé de l'exercice 4.

1. $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix} = -2\,\vec{n}_1$: $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles. Le point $(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ de $\mathcal{P}_1$ donne dans $\mathcal{P}_2$: $-2+5 = 3 \neq 0$: plans strictement parallèles. $\vec{n}_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}_1$: $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants selon une droite.
2. On pose $z = t$. Le système $x - 2y = 1 - t$ et $x + y = -t$ donne, par soustraction, $3y = -1$, soit $y = -\frac{1}{3}$, puis $x = -t + \frac{1}{3}$. Droite : $x = \frac{1}{3} - t$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = t$, de vecteur directeur $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ (on vérifie qu'il est orthogonal à $\vec{n}_1$ et à $\vec{n}_3$: $-1+0+1 = 0$ dans les deux cas).
3. $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : pas parallèles. Point commun ? $1+t = 2+s$ et $2t = 1-s$ donnent $t = 1+s$ puis $2+2s = 1-s$, soit $s = -\frac{1}{3}$ et $t = \frac{2}{3}$. Troisième équation : $3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$ et $4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$: différents. Aucun point commun : les droites sont non coplanaires.

Corrigé de l'exercice 5.

1. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\|\vec{n}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$. Droite Δ : $x = 1+2t$, $y = 2-t$, $z = 3+2t$. Dans $\mathcal{P}$: $2(1+2t) - (2-t) + 2(3+2t) - 3 = 3+9t = 0$, donc $t = -\frac{1}{3}$ et $\mathrm{H}\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{7}{3}\ ;\ \frac{7}{3}\right)$. Vérification : $\frac{2}{3} - \frac{7}{3} + \frac{14}{3} - 3 = 0$. ✓ Distance : $\mathrm{MH} = \frac{1}{3} \times 3 = 1$.

2. K$(t\,;\,1+t\,;\,2-t)$ et $\overrightarrow{\text{AK}}\begin{pmatrix}t-2\\t-2\\1-t\end{pmatrix}$. Avec $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$: $\overrightarrow{\text{AK}}\cdot\vec{u}=(t-2)+(t-2)-(1-t)=3t-5=0$, donc $t=\dfrac{5}{3}$ et K$\left(\dfrac{5}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$. Alors $\overrightarrow{\text{AK}}\begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\-2/3\end{pmatrix}$ et AK $=\sqrt{\dfrac{1+1+4}{9}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\approx 0{,}82$.

3. Pour tout point N de $\mathcal{P}$ distinct de H, le triangle MHN est rectangle en H (car $\overrightarrow{\text{MH}}$ est normal au plan, donc orthogonal à $\overrightarrow{\text{HN}}$). D'après le théorème de Pythagore, $\text{MN}^2=\text{MH}^2+\text{HN}^2>\text{MH}^2$: MN > MH. Le projeté est bien le point le plus proche.

Corrigé de l'exercice 6.

1. B$(1\,;\,0\,;\,0)$, D$(0\,;\,1\,;\,0)$, E$(0\,;\,0\,;\,1)$, G$(1\,;\,1\,;\,1)$.

2. $\overrightarrow{\text{BD}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BE}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, non colinéaires. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{BD}}=-1+1+0=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{BE}}=-1+0+1=0$: $\vec{n}$ est normal à (BDE). Équation : $x+y+z+d=0$ avec B : $1+d=0$, $d=-1$. Donc (BDE) : $x+y+z-1=0$.

3. $\overrightarrow{\text{AG}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\vec{n}$: vecteur directeur colinéaire au vecteur normal, donc (AG) $\perp$ (BDE). (AG) : $x=t$, $y=t$, $z=t$; dans le plan : $3t-1=0$, $t=\dfrac{1}{3}$. Donc I$\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

4. I est le projeté orthogonal de A sur (BDE) : la distance est AI $=\sqrt{3\times\dfrac{1}{9}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}58$.

5. V $=\dfrac{1}{3}\times\text{aire(BDE)}\times\text{AI}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{6}$. Autre méthode : base ABD (triangle rectangle isocèle d'aire $\dfrac{1}{2}$) et hauteur AE = 1 : V $=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{6}$. ✓

Corrigé de l'exercice 7.

1. $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$, non colinéaires. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{AD}}=6-6=0$: $\vec{n}$ est normal au plan. Équation : $2y-3z+d=0$; avec A : $-6+d=0$, $d=6$. Donc (ABD) : $2y-3z+6=0$. Vérification avec D : $6-12+6=0$. ✓

2. $\vec{u}\cdot\vec{n}=0-2+6=4\neq 0$: le rayon n'est pas parallèle au panneau, il le traverse. $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires (première coordonnée 1 contre 0) : il n'est pas orthogonal au panneau non plus.

3. $\mathcal{R}$: $x=1+t$, $y=4-t$, $z=7-2t$. Dans le plan : $2(4-t)-3(7-2t)+6=-7+4t=0$, donc $t=\dfrac{7}{4}$ et I$\left(\dfrac{11}{4}\,;\,\dfrac{9}{4}\,;\,\dfrac{7}{2}\right)$. Vérification : $\dfrac{9}{2}-\dfrac{21}{2}+6=0$. ✓

4. $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}11/4\\9/4\\3/2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$ donne $4\lambda = \dfrac{11}{4}$, soit $\lambda = \dfrac{11}{16}$, et $3\mu = \dfrac{9}{4}$, soit $\mu = \dfrac{3}{4}$; la troisième coordonnée $2\mu = \dfrac{3}{2}$ est cohérente. Comme $0 \leqslant \dfrac{11}{16} \leqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{3}{4} \leqslant 1$, le point I est bien sur le panneau : le rayon le touche.

Corrigé de l'exercice 8.

1. **Réponse D.** Un vecteur normal est $\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$, et tout vecteur colinéaire non nul convient : $\begin{pmatrix}6\\-2\\4\end{pmatrix}$ en est le double.
   - A : la constante -7 n'est pas une coordonnée du vecteur normal.
   - B : erreur de signe sur la deuxième coordonnée.
   - C : coefficients mélangés.
2. **Réponse A.** Pour $t = 1$: $x = 3$, $y = -1$, $z = 3$.
   - B : la cote vaut toujours 3.
   - C : $x = 2$ impose $t = \dfrac{1}{2}$, donc $y = -\dfrac{1}{2}$ et non -1.
   - D : $x = 1$ impose $t = 0$, donc $y = 0$ et non -1.
3. **Réponse C.** $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 - 2 + 0 = 0$: la droite est parallèle au plan.
   - A : il faudrait $\vec{u}$ et $\vec{n}$ colinéaires, ce qui n'est pas le cas.
   - B : le produit scalaire nul exclut que la droite traverse le plan.
   - D : sans un point de $\mathcal{D}$, on ne peut pas savoir si elle est incluse ou strictement parallèle.
4. **Réponse B.** Le plan $z = 4$ est horizontal, de vecteur normal $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; le projeté de M est H(1 ; 1 ; 4) et MH = 4 − 1 = 3.
   - A : 4 est la cote du plan, pas la distance.
   - C : confusion avec les coordonnées de M.
   - D : $\sqrt{3}$ est la distance de M à l'origine, sans rapport avec le plan.

Corrigé de l'exercice 9.

A. Faux. On peut changer de point de départ ou multiplier le vecteur directeur par un réel non nul : il y en a une infinité.

B. Faux. $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$, mais elle peut être strictement parallèle (aucun point commun). Il faut tester un point.

C. Vrai. C'est la caractérisation du parallélisme de deux plans (confondus ou strictement parallèles).

D. Faux. Toute équation $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a\ ;\ b\ ;\ c) \neq \vec{0}$ définit un plan : ici le plan de vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, parallèle à l'axe des cotes.

E. Vrai. Pour tout autre point N de $\mathcal{P}$, le triangle MHN est rectangle en H et MN > MH.

F. Faux. Elles peuvent être non coplanaires : ni parallèles ni sécantes, comme deux arêtes opposées d'un cube.

G. Vrai. Si $\vec{n}$ est normal, $k\,\vec{n}$ l'est aussi pour tout réel $k \neq 0$, et ce sont les seuls.

H. Vrai. $2 \times 0 - 3 \times 0 + 0 = 0$: l'origine vérifie l'équation $(d = 0)$.